

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTRIBUIÇÃO À ADAPTATIVIDADE DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS BI E
TRIDIMENSIONAIS COM A VERSÃO *h-p*

TESE SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MARCELO GRAFULHA VANTI

FLORIANÓPOLIS, 9 DE DEZEMBRO DE 1996

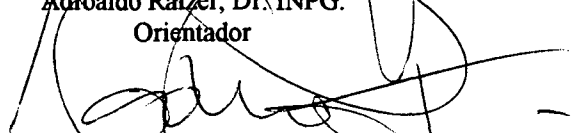
Contribuição à Adaptatividade de Malhas de Elementos Finitos Bi e Tridimensionais com a Versão *h-p*

MARCELO GRAFULHA VANTI

**“Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de
DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA,
e aprovada em sua forma final pelo programa de Pós-Graduação”**




**Adroaldo Raizer, Dr. INPG.
Orientador**

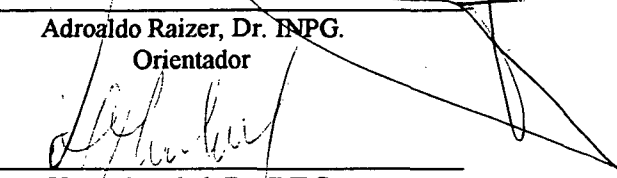


**Adroaldo Raizer, Dr. INPG
Coordenador de Pós-Graduação**

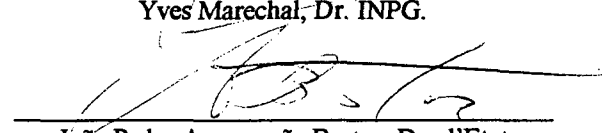
Banca Examinadora



**Adroaldo Raizer, Dr. INPG.
Orientador**



Yves Marechal, Dr. INPG.



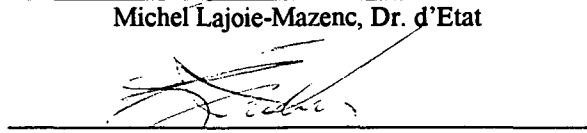
João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat



Renato Cardoso Mesquita, Dr. Eng.



Michel Lajoie-Mazenc, Dr. d'Etat



Nelson Sadowski, Dr. INPT.

Aos Meus Pais

Agradecimentos

Ao professor Adroaldo Raizer, orientador, pela confiança e liberdade com que me brindou e pelo seu apoio permanente o qual tornou possível a realização deste trabalho;

ao professor Yves Maréchal, co-orientador, pelo interesse vivo e pela orientação segura com que acompanhou a realização deste trabalho no período em que estive no LEG;

à minha família;

ao meu irmão Serginho;

à Márcia;

ao meu avô Osmar da Rocha Grafulha, “in memoriam”, pela felicidade que sentiria;

aos amigos, especialmente Lande, Zé, Marco, Volnei, Gouvêa, Hercídio e Ricardo Dávalos;

aos professores, funcionários e colegas dos laboratórios GRUCAD e LEG;

aos companheiros da sala dos doutorandos do Departamento de Engenharia Elétrica;

à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro concedido aqui e no exterior.

Resumo

Neste trabalho propõe-se a implementação de um sistema adaptativo de refinamento de malhas baseado na versão adaptativa h - p utilizando-se o conceito de malhas ótimas. Este sistema foi implementado nos programas Flux3D e EFCAD3D.

Algoritmos para refinamentos com a versão h foram desenvolvidos e elementos hierárquicos são utilizados com o objetivo de eliminar as dificuldades advindas da geração de nós não conformes durante o refinamento de malha com a versão p . Entretanto, a ocorrência destes nós é inevitável quando da aplicação da versão adaptativa h em malhas com elementos hexaédricos e uma técnica para forçar a continuidade da aproximação foi desenvolvida.

Um simples e prático estimador de erros foi também implementado com base nas propriedades características das funções de forma hierárquicas.

Finalmente, são apresentados alguns resultados com o objetivo de validação do sistema proposto.

Abstract

In this work an h - p method based in optimal mesh concepts is proposed. This method has been implemented in the Flux3D and EFCAD3D programs.

h - Version algorithms has been developed and hierarchical elements are used in order to eliminate difficulties due to the nonconforming nodes raising in p version adaptive process. However, these nodes occurs in h refinements with hexaedrals and a technique to force the approximation continuity has been developed.

A simple and practical error estimator based on hierarchic functions proprieties has been implemented too.

Finally, results are presented to validate the proposed method.

Índice

Resumo	II
Abstract	III
Índice	IV
Simbologia	VII
Introdução	1
Capítulo 1 Fundamentos sobre a aproximação de problemas de valor de contorno pelo método dos elementos finitos	7
1.1 Introdução	7
1.2 Formulação variacional de problemas de valor de contorno	7
1.3 O método de Galerkin	13
1.3.1 Existência e unicidade da aproximação de Galerkin	15
1.4 A aproximação por elementos finitos	16
1.4.1 Definições	17
1.5 Convergência da solução de elementos finitos	19
1.6 Conclusão	20
Capítulo 2 O método dos elementos finitos aplicado aos problemas magnetostáticos	21
2.1 Introdução	21
2.2 Equações fundamentais	21
2.2.1 O Potencial Escalar na Solução de Prob. Magnetostáticos	23
2.2.2 O Potencial Vetor na Solução de Prob. Magnetostáticos	25
2.3 Estabelecimento do Problema de Valor de Contorno	28
2.4 O Método de Galerkin e o Método dos Elementos Finitos	28
2.5 Conclusão	31

Capítulo 3 Procedimentos Adaptativos, Definições e Conceitos	33
3.1 Introdução	33
3.2 Definição de Malha Ótima	33
3.3 Procedimentos Adaptativos no Método dos Elementos Finitos	36
3.3.1 Versão h	37
3.3.2 Versão p	37
3.3.3 Versão h - p	38
3.4 Controle de refinamento com a versão h - p	40
3.5 Conclusões	40
Capítulo 4 Funções de Base Hierárquicas	42
4.1 Introdução	42
4.2 Características dos elementos hierárquicas	43
4.3 Funções de forma 1D e significado físico dos coeficientes hierárquicos	44
4.4 A interpolação para os elementos triangulares	46
4.5 A interpolação para o elemento tetraédrico	48
4.6 O condicionamento das equações	49
4.7 A interpolação para elementos hexaédricos	50
4.8 Conclusão	53
Capítulo 5 Estimativas "A Posteriori" de Erros na Discretização no MEF	54
5.1 Introdução	54
5.2 Estimação "a posteriori" na Norma de Energia Utilizando-se a Análise Assintótica	55
5.3 Estimativa Baseada em Formulações Complementares	57
5.4 Estimativas Baseadas no Cálculo de Resíduos	58
5.4.1 Identificação do Erro	58
5.4.2 Indicador de Erro de Babuska & Rheinboldt	60
5.4.3 Métodos Baseados nas Descontinuidades dos Campos	60
5.4.4 Método dos Resíduos nos Elementos	62

5.5 Conclusão	67
Capítulo 6 Versão h - p , Implementação e base de dados	68
6.1 Introdução	68
6.2 Malhas regulares e não regulares	68
6.3 Malhas regulares: Continuidade para elementos hierárquicos	70
6.4 Refinamento h , graus de liberdade impostos e restabelecimento da continuidade (Elementos hexaédricos)	71
6.5 Estrutura de dados	78
6.6 conclusão	80
Capítulo 7 Resultados numéricos	81
7.1 Introdução	81
7.2 Problema com domínio retangular e solução fortemente regular	80
7.3 O problema “L-shaped”	84
7.4 O problema dos ímãs permanentes	87
7.5 Conclusão	92
Conclusões Finais	93
Referências Bibliográficas	96

Simbologia

\vec{A}	Potencial vetor magnético
\vec{B}	Indução magnética
\vec{B}_r	Indução magnética remanente
$B(u, v)$	Forma bilinear em u e v
\vec{D}	Indução elétrica
$D^\alpha u$	α -Ésima derivada fraca de u
Div	Operador divergente
\vec{E}	Campo elétrico
e	Erro de discretização
E_h	Erro relativo
$f(v)$	Funcional linear em v
F_j	Elemento do vetor do segundo membro referente ao nó j na aproximação por elementos finitos
$Grad$	Operador gradiente
h_e	Diâmetro de um elemento
\hat{h}	Mínimo h_e sobre uma malha de elementos finitos
h super ou subscrito	Parâmetro real que indica a discretização de um espaço de Hilbert
\vec{H}	Campo magnético
$H^1(\Omega)$	Espaço de Hilbert de ordem 1 definido sobre Ω
$\hat{H}(\Omega)$	Classe de funções admissíveis de um problema de valor de contorno
$\hat{H}_0(\Omega)$	Classe de funções de teste de um problema de valor de contorno
\hat{H}^h	Classe de funções admissíveis de um problema de elementos finitos
\hat{H}_0^h	Classe de funções de teste em um problema de elementos finitos

I	Funcional quadrático
I_h	Operador de interpolação global
$I(i)$	Conjunto de graus de liberdade (GL) ativos associados a um graus de liberdade imposto i
\vec{J}	Densidade de corrente elétrica
$J(u)$	Funcional energético
$J(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})$ ou $J\vec{n}$	descontinuidade do fluxo normal em uma interface
K_{ij}	Elemento da matriz de rigidez
$L_2(\Omega)$	Espaço das funções cujas derivadas primeiras são integráveis ao quadrado
N	Número total de graus de liberdade(GL)
N^i	Função de base global
N_i	Função de base local
N_k^e	k -Ésima Função de base elementar obtida através da integração de um polinômio de Legendre de ordem p (Capítulo 4)
N_i^0	Função de base interna (Capítulo 4)
$N_i^{(j,k)}$	Função de aresta (Capítulo 4)
$N_m^{(i,j,k,l)}$	Função de face para um elemento hexaédrico(Capítulo 4)
N^a	Conjunto de graus de liberdade ativos
N^c	Conjunto de graus de liberdade impostos
N^{aa}	Conjunto de graus de liberdade ativos associado a um elemento
N_1^*	Função de forma local modificada
\vec{n}	vetor normal
P_l	Polinômio de Legendre de ordem l
P_h	Operador de projeção global
p	Ordem de interpolação
$Q_p(\Omega_e)$	Espaço dos polinômios de ordem maior ou igual a p definidos sobre o elemento Ω_e
Rot	Operador rotacional

R_{ij}	Função de ponderação de contribuição do grau de liberdade ativo j ao grau de liberdade imposto i
$r(x,y)$	Resíduo de uma equação diferencial parcial
r_e	Resíduo sobre o elemento
S^h	Espaço de Galerkin com condição de contorno de Dirichlet homogênea
$S^h(\Omega)$	Subespaço de elementos finitos global
$S^h(\Omega_e)$	Subespaço de elementos finitos local
$S^{\circ H}$	Espaço de funções bolhas
U	Espaço de Hilbert
U^h	Subespaço finito obtido por restrição de U
u	Solução de um problema de valor de contorno
u_0	Condição de contorno de Dirichlet
u_h	Solução aproximada por elementos finitos de um problema de valor de contorno
V	Espaço de Hilbert
V^h	Subespaço finito obtido por restrição de V
x,y,z	Coordenadas espaciais
w	Função genérica
β	Taxa de convergência (Capítulo 3)
Γ	Fronteira de um problema de contorno
Γ_D	Parcela da fronteira onde é imposta condição de contorno de Dirichlet
Γ_N	Parcela da fronteira onde é imposta condição de contorno de Newmann
Γ_C	Parcela da fronteira onde é imposta condição de contorno de Cauchy
δ_I	Primeira variação do funcional I
ε	Permissividade elétrica
η	Densidade de graus de liberdade
η_e	Indicador local de erro
φ_e	Densidade de erro local

Π_h	Operador de interpolação local
λ	Multiplicador de Lagrange
λ_r	Regularidade do problema (Capítulo 3)
μ	Permeabilidade magnética
ν	Relutividade magnética
ρ	Densidade de carga elétrica
Ω	Domínio de um problema de valor de contorno
$\overline{\Omega}$	Fechamento de Ω
Ω_e	Cada elemento finito
Ω_h	Ω Discretizado em elementos finitos
σ	Condutividade elétrica
τ	Taxa de convergência (Capítulo 1)
υ	Função de teste
ψ	Potencial escalar magnético
\bullet	Produto escalar
\wedge	Produto vetorial
$[\bullet]$	Variação de uma grandeza em um ponto
$\ \bullet\ $	Norma euclidiana
$\ \bullet\ _1$	Norma de Sobolev de ordem 1
$ \bullet $	Semi norma de Sobolev
$\ \bullet\ _E$	Norma de energia

Introdução

Nas duas últimas décadas (80/90) a análise por elementos finitos tem sido largamente utilizada em projetos de dispositivos eletromagnéticos, notadamente para simular e avaliar o desempenho de um novo dispositivo antes de se construir um protótipo. O método dos elementos finitos é baseado nos domínios dos métodos de Raileigh e Ritz e dos métodos de projeção de Galerkin. Ele é assim uma poderosa ferramenta para a análise numérica de equações diferenciais dotado de uma moderna teoria de aproximações. A matemática de elementos finitos foi estabelecida nos anos setenta, e hoje uma completa teoria de convergência do método é disponível (Ciarlet, 1978), (Oden & Reddy, 1976). É interessante, a título introdutório, apresentar-se alguns resultados fundamentais da teoria de convergência, os quais serão úteis ao longo deste trabalho. Será assim deduzida uma expressão relacionando o erro com os parâmetros de aproximação, como a ordem polinomial da interpolação utilizada e a densidade de pontos de discretização.

Considere-se para este fim uma função quadrática unidimensional u , a qual é definida em um elemento com três nós em $x=-h$, $x=0$ e $x=h$. A função u pode ser aproximada por u_h como

$$u_h = a_1 + a_2x + a_3x^2 \quad (\text{I.1})$$

Escrevendo (I.1) em cada nó e avaliando para a_1 , a_2 , e a_3 obtém-se:

$$u_h = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (\text{I.2})$$

onde u_i refere-se ao valor da função aproximada no nó i e N_i são as funções de base locais dadas por:

$$N_1 = \xi(\xi-1)/2 \quad N_2 = 1-\xi^2 \quad N_3 = \xi(\xi+1)/2$$

com $\xi=x/h$. Agora, seja a extensão em série de Taylor de u_1 e u_3 em torno do ponto $x=0$

$$u_1 = u_2 - u_2' + \frac{u_2''}{2!} - \frac{u_2'''}{3!} + \dots \quad (\text{I.3a})$$

e

$$u_3 = u_2 + u_2' + \frac{u_2''}{2!} + \frac{u_2'''}{3!} + \dots \quad (\text{I.3b})$$

onde as apóstrofes indicam as derivadas com respeito a ξ . Em vista de (I.2) e (I.3), chega-se a expressão para o valor aproximado u_h ,

$$u_h = (N_1 + N_2 + N_3)u_2 + (N_3 - N_1)u_2' + \frac{1}{2!}(N_3 + N_1)u_2'' + \frac{1}{3!}(N_3 - N_1)u_2''' + \dots \quad (\text{I.4})$$

Desde que $N_1 + N_2 + N_3 = 1$, $N_3 - N_1 = \xi$, e $N_3 + N_1 = \xi^2$ tem-se:

$$u_h = u_2 + \xi u_2' + \frac{1}{2!} \xi^2 u_2'' + \frac{1}{3!} \xi u_2''' + \dots \quad (\text{I.5})$$

Por outro lado, a solução exata pode ser expandida em torno de $x=0$ na forma

$$u = u_2 + \xi u_2' + \frac{1}{2!} \xi^2 u_2'' + \frac{1}{3!} \xi^3 u_2''' + \dots \quad (\text{I.6})$$

e assim, considerando-se (I.5) e (I.6), segue-se que:

$$u - u_h = \frac{1}{3!} u_2''' (\xi^3 - \xi) + \dots \quad (\text{I.7})$$

Como $x=\xi h$ e $dx=h d\xi$, a terceira derivada em (I.7) é escrita como:

$$\frac{d^3 u}{d\xi^3} = \frac{d^3 u}{dx^3} \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^3 = \frac{d^3 u}{dx^3} h^3 \quad (\text{I.8})$$

Portanto, o módulo do erro em (I.7) pode ser rescrito como:

$$|u - u_h| = \left| \frac{h^3}{6} \frac{d^3 u_2}{dx^3} (\xi^3 - \xi) + \dots \right| \quad (\text{I.9})$$

e daí

$$|u - u_h| \leq ch^3 \left| \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_{\max} \quad (\text{I.10})$$

onde c é uma constante positiva independente de h e $\left| \frac{d^3 u}{dx^3} \right|$ é limitado. Para uma função N_i com ordem polinomial k , pode-se escrever

$$|u - u_h| \leq ch^{k+1} C_{k+1} \quad (\text{I.11})$$

onde C_{k+1} é um limite para as $(k+1)$ derivadas em relação a x . A m -ésima derivada de (I.11) tem a forma seguinte:

$$\left| \partial^m (u - u_h) / \partial x^m \right| \leq ch^{k+1-m} C_{k+1} \quad (\text{I.12})$$

Portanto, para um elemento de comprimento h , tem-se:

$$|u - u_h| \leq O(h^{k+1})$$

e as m -ésimas derivadas podem ser aproximadas até $O(h^{k+1-m})$. Para problemas até $2m$ -ésima ordem, a energia inclui derivadas até a m -ésima ordem. A norma do erro torna-se:

$$\left\| \partial^m (u - u_h) / \partial x^m \right\|_m \leq ch^{k+1-m} C_{k+1} \quad (\text{I.13})$$

onde $\|\circ\|$ indica a norma de energia.

Algumas conclusões podem ser adiantadas com base nesta rudimentar estimativa “a priori” de erro. Primeiro, a energia aproximada em uma malha pouco densa aproxima-se da energia exata com o refinamento da malha. Em problemas de segunda ordem, a energia inclui derivadas de primeira ordem. A precisão obtida com a interpolação de elementos finitos depende de quão exatamente a interpolação pode aproximar a solução exata até a sua primeira derivada. Como foi visto, qualquer função regular pode ser aproximada por elementos lineares com um erro de grandeza $O(h^2)$. Suas primeiras derivadas podem ser aproximadas até $O(h)$. Segundo, usando-se interpolação de alta ordem, atinge-se uma melhor aproximação com o mesmo número de elementos e daí uma alta taxa de convergência. Terceiro, a solução u é considerada como uma função regular e estas considerações são válidas para este caso. Quando a solução é não regular, a dependência da convergência em função da ordem de aproximação dependerá do grau de irregularidade da solução.

Atualmente, o estado da arte nas pesquisas em cálculo de campos por elementos finitos (e/ou mecânica computacional) está em grande parte focado no desenvolvimento e estudo de sistemas auto adaptativos os quais visam a redução do erro por meio de técnicas como o refinamento da malha, conhecido como versão h do método dos elementos finitos, o aumento da ordem de interpolação, conhecido como versão p , e a combinação destas duas técnicas, isto é, a versão h - p . (Raizer et al, 1990; Giannacopoulos & Mcfee, 1993). A expressão auto adaptativo indica que após a geração inicial de uma malha esparsa com elementos de primeira ordem o algoritmo é capaz de gerar uma sequência de malhas refinando-as e/ou elevando a ordem de

interpolação, este processo sendo interrompido quando um nível desejado de precisão é atingido. Na figura I.1 é apresentado um fluxograma de um sistema deste tipo.

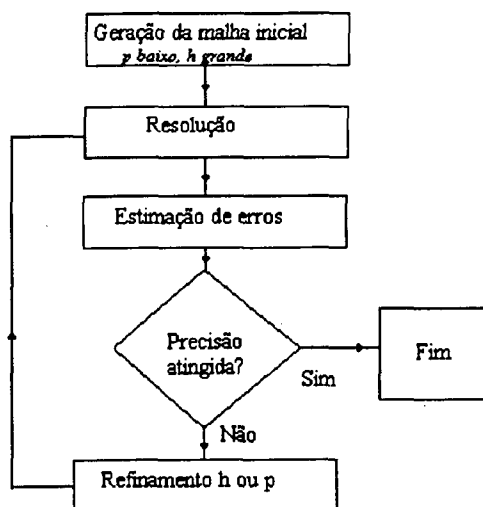


Figura I.1 Fluxograma de um sistema auto-adaptativo

Sobre este ponto de vista, pode-se notar que a grande maioria dos programas de CAD por elementos finitos (MEF) em eletromagnetismo é baseada na versão h deste método finitos (Cendes & Shenton, 1985; Coulomb, 1987; Fernandes et al, 1990; Hahn, 1988; Hoole et al, 1986; Hoole et al, 1988), a qual consiste no refinamento da malha, seja auto adaptativa ou não. No caso em que não existe auto adaptatividade, é o próprio analista que insere novos nós na malha com o objetivo de controlar o erro obtido na solução aproximada. Um algoritmo auto adaptativo utiliza ainda um método de estimação “a posteriori” de erros para dirigir o processo de refinamento.

Ao lado da versão h , nos últimos dez anos os grupos de pesquisa tem explorado também a versão p , e atualmente grande destaque é dado a versão combinada, ou seja, a versão $h-p$.

A escolha da melhor versão é dependente do comportamento da solução exata (Carey & Humphrey, 1981). Quando a solução é regular, a versão p , como pode ser depreendido após as considerações iniciais desta introdução, é a mais eficiente. Todavia se existirem pontos singulares no modelo analisado, então a versão $h-p$ é a maneira mais eficiente no controle de erros de discretização. Uma discussão mais pormenorizada sobre as diferentes estratégias adaptativas pode ser vista no capítulo 3.

O objetivo deste trabalho consiste justamente na implementação de uma eficiente metodologia com algoritmos adaptativos em problemas bi e tridimensionais. Esta metodologia visa a utilização do conceito de malhas ótimas para geração de malhas de elementos finitos usando-se a versão h - p deste método. Embora malhas ótimas sejam o objeto de estudo em adaptatividade já há alguns anos no campo de mecânica computacional (Rachowicz et al, 1989; Babuska and Szabo, 1982), até agora não tem sido quase utilizadas por engenheiros eletricitas em problemas eletromagnéticos. Por exemplo, quando a versão p é utilizada, tem-se preferido evitar o refinamento em pontos singulares lançando-se mão de baixa discretização com altas ordens de interpolação (Wen & Jiang, 1994). Neste trabalho propõe-se, pelo contrário, basear o procedimento adaptativo no grau regularidade da solução exata. Para isto, é necessário a implementação das versões h e p de forma em que possam ser empregadas isoladamente ou combinadas, e de um eficiente método de estimação de erro.

No capítulo 1 desta monografia serão apresentados os métodos de Galerkin e dos elementos finitos, e alguns resultados importantes relativos a convergência destes métodos. No capítulo 2 aplica-se o método dos elementos finitos a problemas eletromagnéticos.

No capítulo 3, é introduzido o conceito de malhas ótimas, e discutidas as diversas possibilidades em função da regularidade do problema. No capítulo 4, descreve-se a família dos elementos hierárquicos utilizados neste trabalho, e o capítulo 5 trata das técnicas de estimação de erro analisadas. Finalmente, o capítulo 6 descreve o sistema desenvolvido e alguns resultados numéricos são apresentados no capítulo 7.

Capítulo 1

Fundamentos sobre a aproximação de problemas de valor de contorno pelo método dos elementos finitos

1.1 Introdução

Na introdução desta monografia foi apresentada uma abordagem elementar da teoria de convergência no método dos elementos finitos. As conclusões obtidas não podem no entanto ser generalizadas para problemas multidimensionais.

Neste capítulo será visto como problemas envolvendo equações diferenciais parciais com condições definidas sobre o contorno são aproximados pelo método dos elementos finitos, após ter-se construída a formulação fraca do problema. São também apresentados alguns aspectos e resultados importantes que dirigirão este trabalho nos capítulos subsequentes. Por simplicidade de apresentação, este capítulo será baseado na solução de uma equação bidimensional simples. No próximo capítulo, os resultados serão aplicados a problemas magnetostáticos tridimensionais.

1.2 Formulação variacional de problemas de valor de contorno

Considere-se, com o objetivo de representar a classe dos problemas tratados, a formulação clássica de um problema representado por uma equação diferencial de segunda ordem em duas dimensões, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2 \quad (1.1)$$

onde μ é função de x, y , e as seguintes condições de contorno:

a) condição de contorno de Dirichlet;

$$u = u_0, \text{ em } \Gamma_D \quad (1.2)$$

b) condição de contorno de Neumann;

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g, \text{ em } \Gamma_N \quad (1.3)$$

c) condição de contorno de Cauchy, onde é especificada uma combinação linear da solução e da sua derivada normal no contorno, ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = g_c, \text{ em } \Gamma_C \quad (1.4)$$

A situação física representada em (1.1) é constituída por uma lei constitutiva e um princípio de conservação. A lei constitutiva estabelece que em um dado ponto de Ω , o fluxo é proporcional ao gradiente da função u , também denominada de variável de estado (Becker, 1981). Por outro lado, segundo o princípio de conservação, em qualquer porção do domínio o fluxo através do contorno tem que ser igual àquele produzido por fontes internas.

Suponha-se que este problema possua uma solução e seja ela tal que $u \in H^k$, e H^k é o espaço de Hilbert definido por

$$H^k(\Omega) = \{u: D^\alpha u \in L_2(\Omega), \forall \alpha / |\alpha| \leq k\} \quad (1.5)$$

onde $D^\alpha u$ é a α -ésima derivada fraca de u , L_2 é o espaço das funções com primeiras derivadas integráveis ao quadrado sobre Ω , e desta forma o espaço H^k é provido com a seguinte norma:

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \infty \quad (1.6)$$

Assim, o termo $f(x,y) \in H^{k-2}$ (Oden et Reddy, 1976), ou seja, existe uma relação direta entre a regularidade da solução u e a regularidade do termo do lado direito em (1.1). Se $f(x,y) \in H^0$, então $u \in H^2$, ou mais especificamente um subespaço de H^2 no qual as condições de contorno são observadas.

Nesta formulação é necessário que u seja suficientemente regular em todos os pontos do domínio, condição excessivamente forte dado que μ em certas classes de problemas é passível de sofrer descontinuidades em determinados pontos do interior, como mostrado na figura (1.1). Neste caso, a eq. (1.1) é válida somente no interior dos subdomínios regulares (Ω_1 e Ω_2). Nos pontos de descontinuidade de μ , a equação (1.1) não é definida mas a seguinte condição de continuidade é satisfeita devido à conservação do fluxo:

$$\left[-\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \right] \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.7)$$

onde $[\cdot]$ significa o salto ou descontinuidade da função ao longo do contorno entre Ω_1 e Ω_2 .

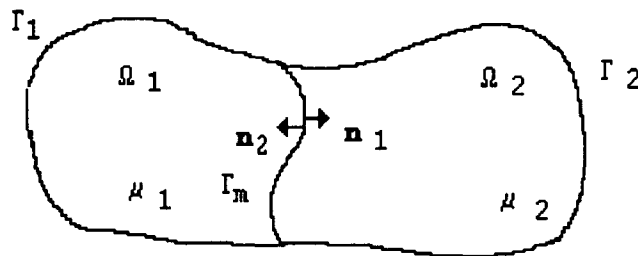


Figura 1.1. Domínio com duas regiões com permeabilidades magnéticas diferentes

Entretanto, a regularidade da equação diferencial pode ser consideravelmente enfraquecida, através de uma forma alternativa para o problema, conhecida como formulação fraca. Esta é atingida definindo-se o resíduo em (1.1):

$$r(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] - f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega \quad (1.8)$$

Multiplica-se agora $r(x,y)$ por uma função suficientemente regular v , integra-se sobre cada subdomínio onde $r(x,y)v$ é regular e iguala-se a média ponderada resultante à zero, ou seja:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] - f(x,y) \right) v d\Omega + \\ \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] - f(x,y) \right) v d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Integrando-se (1.9) por partes e aplicando o teorema da divergência, tem-se como resultado:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - f(x,y)v \right) d\Omega + \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - f(x,y)v \right) d\Omega + \\ \int_{\partial\Omega_1} \left[-\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \right] \cdot \vec{n} v d\Gamma + \int_{\partial\Omega_2} \left[-\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \right] \cdot \vec{n} v d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ao longo da interface entre Ω_1 e Ω_2 , a condição de continuidade (1.7) deve ser satisfeita, e assim a eq. (1.10) torna-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - f(x,y)v \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \mu v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (1.11)$$

onde $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ e $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ é o contorno exterior do domínio.

Neste ponto define-se a classe a qual pertence a solução do problema, chamada de classe de funções admissíveis, e a classe de funções de teste v . Assim, u e v são definidas como segue (Oden & Reddy, 1976):

$$u \in \hat{H}(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) / u = u_0 \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (1.12)$$

$$v \in \hat{H}_0(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (1.13)$$

Devido a definição das funções teste e com a aplicação da condição de contorno de Neumann homogênea ($g = 0$) (1.11) reduz-se a:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} f(x, y) v d\Omega \quad \forall v \in \hat{H}_0(\Omega) \quad (1.14)$$

Refere-se a (1.14) como problema variacional de valor de contorno. Deve-se agora notar as seguintes observações:

- 1) A equação (1.1) apresenta derivadas de segunda ordem da solução, ao passo que em (1.14) existem apenas derivadas de primeira ordem. A regularidade necessária para a solução foi enfraquecida, aumentando-se a classe das funções admissíveis para o problema. Assim, a solução de (1.14) necessita estar apenas no espaço $H^1(\Omega)$. Entretanto, sabe-se que $H^2(\Omega)$ é densamente embutido em $H^1(\Omega)$ (Oden & Reddy 1976), sendo portanto possível que as duas soluções de (1.1) e (1.14) sejam as mesmas. Além disso, qualquer solução de (1.1) é também solução de (1.14), ou seja toda solução clássica também é solução fraca. (Becker et al., 1981).
- 2) A equivalência entre os termos formulação variacional e forma fraca advém do fato que (1.14) é precisamente a condição necessária para o desaparecimento da primeira variação do funcional quadrático correspondente a (1.1). (Oden et Reddy, 1976)

De fato, seja $B(u, v)$ a seguinte forma bilinear simétrica sobre $\hat{H} \times \hat{H}_0$ onde $u \in \hat{H}$ e $v \in \hat{H}_0$:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \text{Grad } u \cdot \mu \text{Grad } v d\Omega \quad (1.15)$$

e seja $f(v)$ o funcional linear em \hat{H}_0 :

$$f(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (1.16)$$

Então, a formulação fraca pode ser abstratamente representada como:

$$B(u, v) = f(v) \quad , \quad \forall v \in \hat{H}_0(\Omega) \quad (1.17)$$

Deve-se ressaltar que um grande número de problemas podem ser representados utilizando-se a forma acima. Considere-se agora o seguinte funcional quadrático:

$$I(u) = B(u, u) - 2f(u) \quad (1.18)$$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e arbitrário $v \in \hat{H}_0(\Omega)$, $u + \alpha v \in \hat{H}(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned} I(u + \alpha v) &= B(u + \alpha v, u + \alpha v) - 2f(u + \alpha v) = \\ &= I(u) + 2\alpha[B(u, v) - f(v)] + \alpha^2 B(v, v) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Portanto, a primeira variação $\delta I(u, v)$ de $I(u)$ se anula no ponto $u \in \hat{H}(\Omega)$ para o qual

$$\delta I(u, v) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [I(u + \alpha v) - I(u)] = 2[B(u, v) - f(v)] = 0 \quad (1.20)$$

isto é, $\delta I(u, v)$ se anula no ponto mínimo de $I(u)$ onde

$$B(u, v) = f(v) \quad , \quad \forall v \in \hat{H}_0(\Omega)$$

Obs.: Este resultado é verdadeiro considerando-se a simetria de $B(u, v)$ utilizada para chegar-se a (1.20).

3) A existência e unicidade da solução dos problema variacionais são tratados pelo teorema generalizado de Lax - Milgran (Oden & Reddy, 1976).

1.3 O método de Galerkin

O método de Galerkin é uma técnica proposta em 1915 por E.G. Galerkin para soluções aproximadas de problemas de valor de contorno, a qual propõe uma discretização direta da formulação variacional do problema.

Na seção anterior utilizou-se a forma variacional (1.17) para se representar uma equação diferencial genérica, ou seja

$$B(u, v) = f(v) \quad , \quad \forall v \in V$$

onde $B(u, v)$, $f(v)$ são como definidos anteriormente, e U e V são espaços de Hilbert cuja definição depende do problema em questão. O método de Galerkin consiste em procurar-se soluções para (1.17) em subespaços finitos restritos de U e V . Assim, para $U^h \subset U$ e $V^h \subset V$ o problema resume-se em achar $u_h \in U^h$ de forma que:

$$B(u_h, v_h) = f(v_h) \quad , \quad \forall v_h \in V^h \quad (1.21)$$

É importante notar que o subscrito h indica que as propriedades destes subespaços geralmente dependem de algum parâmetro real, como a dimensão dos elementos de uma malha de elementos finitos por exemplo, de forma que quando h diminui as dimensões de U^h e V^h aumentam tendendo a "encher" U e V , respectivamente. (Oden & Reddy, 1976).

Observações:

1) A notação $S^h = U^h = V^h$ onde S^h é definido como:

$$S^h = \{u \in H^1(\Omega) / u = 0 \text{ em } \Gamma_D\}$$

pode ser utilizada alternativamente, nomeando-se S^h como espaço de Galerkin. Desta forma, um problema com condição de Dirichlet não homogênea é formulado como: ache $u \in u_0 + S^h$ de forma que:

$$B(u, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in S^h$$

2) Ortogonalidade do erro: Tendo em vista que (1.17) é satisfeita para qualquer $v \in V$, ela o é em particular para $v_h \in V^h \subset V$. Portanto,

$$B(u, v_h) = f(v_h) \quad , \quad \forall v_h \in V^h \quad (1.22)$$

Subtraindo-se (1.21) de (1.22) tem-se:

$$B(u - u_h, v_h) = 0 \quad , \quad \forall v_h \in V^h \quad (1.23)$$

Este resultado é interpretado como condição de ortogonalidade. O erro é ortogonal ao subespaço V^h no sentido de (1.23), isto é, em relação ao mapeamento bilinear $B(\cdot, \cdot)$, (fig. 1.2).

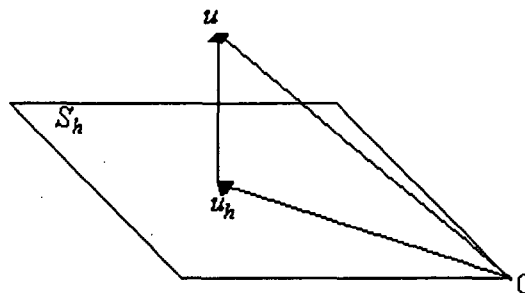


Figura 1.2. Ortogonalidade do erro em relação ao espaço de Galerkin.

3) Melhor aproximação. Suponha-se que $B(u, v)$ seja simétrica e positiva definida ($B(v, v) \geq 0$ e $B(u, v) = 0$ se e somente se $v = 0$). Então, para arbitrário $w_h \in S^h$, e sendo u a solução de (1.17), tem-se que

$$\begin{aligned} B(u - w_h, u - w_h) &= B((u - u_h) + (u_h - w_h), (u - u_h) + (u_h - w_h)) = \\ &= B(u - u_h, u - u_h) + B(u_h - w_h, u_h - w_h) = \\ &= B(e, e) + B(u_h - w_h, u_h - w_h) \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde foi utilizada a condição de ortogonalidade (1.23). Note-se que se fizermos $u_h, w_h \in \hat{H}^h$, e $v_h \in \hat{H}_0^h$, então $u_h - w_h \in \hat{H}_0^h$ e (1.24) é válida. Este resultado implica que o mínimo de $B(u - w_h, u - w_h)$ ocorre quando $w_h = u_h$. Por isto, u_h é a melhor aproximação para u no espaço S^h .

1.3.1 Existência e unicidade da aproximação de Galerkin

Sejam U^h e V^h subespaços fechados dos espaços de Hilbert U e V respectivamente e $B(u, v)$ uma forma bilinear contínua fracamente coerciva sobre $U \times V$; isto é, existem constantes $M_0, \Phi > 0$, de forma que:

$$|B(u, v)| \leq M \|u\|_U \|v\|_V \quad (1.25)$$

$$|B(u_h, v_h)| \leq M_0 \|u_h\|_U \|v_h\|_V$$

$$\inf_{\substack{u_h \in U^h \\ \|u_h\| = 1}} \sup_{\substack{v_h \in V^h \\ \|v_h\| \leq 1}} |B(u_h, v_h)| \geq \Phi > 0 \quad (1.26)$$

$$\sup_{u_h \in U^h} |B(u_h, v_h)| > 0, \quad \forall v_h \in V^h; v_h \neq 0 \quad (1.27)$$

Com estas condições, tem-se os seguintes teoremas (Oden & Reddy, 1976):

Teorema 1.1. Se as condições (1.25) - (1.27) são satisfeitas, então existe um único elemento $u_h^* \in U^h$ que satisfaz o problema de Galerkin (1.21).

Teorema 1.2. Seja o erro de discretização definido por:

$$e = u - u_h^*$$

onde u e u_h^* são soluções de (1.17) e (1.21) respectivamente. Então, a seguinte estimativa "a priori" do erro é satisfeita:

$$\|e\|_U \leq \left(1 + \frac{M}{\Phi}\right) \|u - u_h\|_U, \quad \forall u_h \in U^h \quad (1.28)$$

onde M e Φ são as constantes em (1.25) e (1.26).

A demonstração deste teorema é encontrada em (Oden&Reddy, 1976).

1.4 Aproximação por elementos finitos

O método dos elementos finitos fornece um meio sistemático de construção das famílias de subespaços S^h . Aqui o domínio Ω é substituído por uma coleção Ω_h de domínios simples Ω_e denominados de elementos finitos de forma que:

$$\Omega_h \cong \Omega \quad \overline{\Omega}_h = \bigcup_{e=1}^E \overline{\Omega}_e \quad (1.29)$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad (1.30)$$

onde $\overline{\Omega}$ é o fechamento de Ω

A cada elemento Ω_e estão associadas os subespaços de dimensão finita $S^h(\Omega_e)$. Os elementos destes subespaços são as funções polinomiais de formas locais. O subespaço de elementos finitos global, $S^h(\Omega)$, é constituído pelas funções bases globais que quando restritas a algum elemento Ω_e , pertençam ao subespaço local $S^h(\Omega_e)$ (Oden et al., 1989).

1.4.1 Definições

A coleção Ω_h é denominada malha de elementos finitos. Para cada malha é definido um parâmetro real positivo h denominado parâmetro de malha. (conforme fig. 1.3)

O diâmetro de um elemento Ω_e qualquer é definido como:

$$h_e = \max_{x,y \in \Omega_e} |x - y|_{R^n} = \max_{x,y \in \Omega_e} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.31)$$

ou seja, h_e é o diâmetro do círculo circunscrito ao elemento. Então, h é definido como:

$$h = \max\{h_1, h_2, h_3, \dots, h_E\} \quad (1.32)$$

onde E é o número de elementos da malha.

Define-se ainda:

$$\rho_e = \sup\{\text{diâmetro de todas as esferas contidas em } \Omega_e\}$$

$$\rho = \min_{1 \leq e \leq E} \{\rho_e\} \quad (1.33)$$

$$\hat{h} = \min\{h_1, h_2, \dots, h_E\} \quad (1.34)$$

$$\gamma = \frac{h}{\hat{h}} \quad (1.35)$$

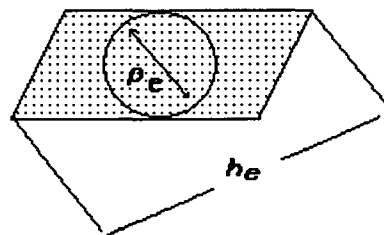


Figura 1.3 Parâmetros de malha

Teorema 1.3 (teorema de interpolação para os elementos finitos- Oden&Reddy,1976)

Seja S^h um espaço de elementos finitos de ordem $k \geq 1$, e a função $u \in H^{k+1}$, onde H^{k+1} é o espaço de Sobolev de ordem $k+1$. Seja ainda m um número inteiro tal que $0 \leq m \leq k+1$. Então existe uma constante positiva C , independente de u e h , tal que:

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega_h)} \leq C \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (1.36)$$

onde u_h é a interpolante de u no espaço de elementos finitos e $|u|_{H^{k+1}}$ é a seminorma do espaço de Sobolev de dimensão $k+1$.

$$|u|_{H^r(\Omega_e)} = \left[\int_{\Omega_e} \sum_{\alpha=r} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

Observações:

1) Quando $\gamma = 1$, a malha é dita uniforme. Além disso, se o parâmetro definido como

$$\sigma = \frac{h}{\rho}$$

é mantido limitado em uma sequência de refinamentos da malha, esta sequência é dita ser quase-uniforme.

Neste caso, a estimativa (1.36) pode ser escrita como:

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega_e)} \leq C_1 h^{k+1-m} |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (1.38)$$

2) Da estimativa (1.36) podem ser deduzidos os efeitos negativos causados por uma forte distorção geométrica em um elemento. Se durante um refinamento da malha o parâmetro h diminui a uma taxa muito menor do que ρ , o erro em (1.36) pode crescer consideravelmente. (fig. 1.4)

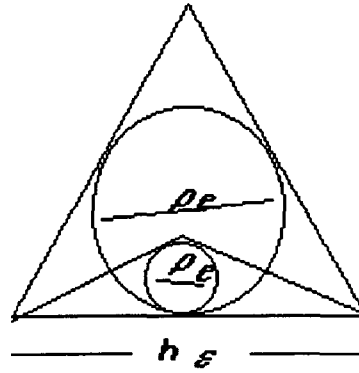


Figura 1.4. distorção de um elemento triangular

1.5 Convergência da solução de elementos finitos

Seja a solução exata u cuja regularidade é tal que $u \in H^r(\Omega)$, e a solução aproximada por elementos finitos u_h sendo que $u_h \in S^h$. Logo, (Oden&Reddy, 1976)

$$\|u - u_h\|_m \leq Ch^\tau \|u\|_r \quad (1.39)$$

onde $\tau = \min(k+1-m, r-m)$, C é uma constante e $m < r$.

Em (1.40) é usada a notação $\|\cdot\|_m$ no lugar de $\|\cdot\|_{H^m}$.

Portanto, a taxa pela qual a solução aproximada u_h converge é fornecida pelo expoente τ . Se u é suficientemente regular, tal que $r-m > k+1-m$, pode-se aumentar a taxa de convergência incrementando a ordem k dos polinômios definidos nos elementos. Por outro lado, se a solução é tão irregular que $r-m < k+1-m$, a taxa de convergência é agora completamente independente do valor de k . Não importa quão grande seja o valor de k no elemento, a taxa de convergência será $r-m$. Além disso, perde-se precisão da diferenciação, e o erro estimado em normas mais fracas é da forma (Becker et al., 1981)

$$\|e\|_s \leq Ch^\tau \|u\|_r \quad 0 \leq s \leq m \quad (1.40)$$

$$\tau = \min(k+1-s, r-s)$$

Portanto, se $k=1$, $m=1$, $r=3$, tem-se:

$$\|e\|_1 \leq Ch\|u\|_3 \quad e \quad \|e\|_0 \leq Ch^2\|u\|_3$$

1.6 Conclusão

Neste capítulo partiu-se da análise de um problema bidimensional de segunda ordem para em seguida introduzir os métodos de Galerkin e dos elementos finitos, e generalizou-se importantes resultados da teoria de convergência destes dois métodos. No próximo capítulo será visto como problemas eletromagnéticos são representados e resolvidos usando-se o método dos elementos finitos.

Capítulo 2

O Método dos elementos finitos aplicado aos problemas magnetostáticos

2.1 Introdução

Neste capítulo os conceitos discutidos no capítulo anterior serão aplicados a solução de problemas magnéticos estáticos.

Inicialmente, serão apresentadas as equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Em seguida, mostra-se como é obtida a forma fraca para o problema eletromagnético, e a aplicação do método de Galerkin e dos elementos finitos na resolução do problema transformado.

2.2 Equações Fundamentais

As equações fundamentais do eletromagnetismo são as equações de Maxwell:

$$\text{Rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

onde

\vec{E} - vetor campo elétrico.

\vec{B} - vetor indução magnética.

\vec{H} - vetor campo magnético.

\vec{D} - vetor indução elétrica.

\vec{J} - vetor densidade superficial de corrente elétrica.

ρ - densidade volumétrica de carga elétrica.

A estas equações são acrescentadas relações adicionais, denominadas relações constitutivas, as quais dependem dos meios nos quais existem os campos:

$$\vec{D} = |\varepsilon| \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = |\mu| \vec{H} + \vec{B}r \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = |\sigma| \vec{E} \quad (2.7)$$

onde

$|\varepsilon|$ - tensor permissividade elétrica do meio

$|\mu|$ - tensor permeabilidade magnética do meio

$|\sigma|$ - tensor condutividade elétrica do meio

$\vec{B}r$ - indução magnética remanente

Considerando-se que os meios são isotrópicos, os tensores $|\varepsilon|$, $|\mu|$, $|\sigma|$ são reduzidos aos escalares ε , μ , e σ e as relações constitutivas (2.5), (2.6), e (2.7) tornam-se:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.8)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}r \quad (2.9)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.10)$$

Neste estudo estamos interessados em fenômenos eletromagnéticos estáticos, ou seja, em fenômenos onde não existe (ou é desprezível) variação temporal das grandezas envolvidas.

Assim, podemos modificar as equações (2.1) e (2.2) e rescrever o conjunto das equações de Maxwell da seguinte forma (Ida & Bastos, 1992; Silvester, 1968):

$$\text{Rot } \vec{E} = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (2.12)$$

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (2.14)$$

2.2.1 O potencial escalar total na solução de problemas magnetostáticos

Na seção precedente foram identificadas as equações que descrevem o comportamento dos campos eletromagnéticos, ou seja, as equações de Maxwell. Uma vez que sejam resolvidas, o projetista de um dispositivo poderá prever as características do mesmo. Entretanto, as equações (2.1) - (2.4) ou (2.11) - (2.14) são dadas em função de campos vetoriais, existindo alguns inconvenientes associados a solução direta destas equações.

Em primeiro lugar, como foi discutido no capítulo anterior, os campos vetoriais são descontínuos nas interfaces entre materiais diferentes (somente a componente normal da indução e a componente tangencial do campo são contínuas nesta interfaces (Ida & bastos, 1992)). Além disso, tratando-se diretamente com campos vetoriais torna-se necessário resolver as equações acopladas (2.11-2.14) ou (2.12-2.13).

Estas dificuldades podem ser contornadas definindo-se uma função, vetorial ou escalar, cujas derivadas substituam as soluções de (2.11) - (2.14). Esta função será agora a solução a ser calculada, cuja derivada fornece os valores de campos ou induções procurados.

Assim, em problemas nos quais não existem correntes no domínio de estudo, pode ser definida uma função potencial escalar magnético ψ , a partir da qual é obtido o campo \vec{H} .

$$\vec{H} = -\text{Grad } \psi \quad (2.15)$$

Esta definição tem sua validade verificada substituindo-a em (2.12) e fazendo $\vec{J} = 0$

Substituindo (2.15) em (2.13) e considerando a relação constitutiva (2.9), tem-se:

$$\text{Div}(\mu \text{Grad } \psi) = \text{Div } \vec{B}r \quad (2.16)$$

A eq. (2.16) descreve o comportamento da solução no domínio exceto nos pontos de descontinuidade de μ onde são válidas as seguintes expressões (Ida & Bastos, 1992):

$$\vec{n} \cdot [-\mu \text{Grad } \psi + \vec{B}r] = 0 \quad (2.17)$$

$$\vec{n} \wedge [\text{Grad } \psi] = 0 \quad (2.18)$$

onde

\vec{n} - é o vetor unitário normal a interface

\cdot - produto escalar,

\wedge - produto vetorial, e

$[\bullet]$ - é o "salto" ou descontinuidade na interface

A equação (2.17) implica na descontinuidade da componente normal de $\text{Grad } \psi$ na interface entre dois meios de permeabilidades magnéticas diferentes. A eq. (2.18), por outro lado, indica que a componente tangencial de $\text{Grad } \psi$ é contínua. Esta condição é automaticamente satisfeita por um potencial ψ contínuo.

Na fronteira Γ do domínio Ω , tem-se ainda as seguintes condições de contorno:

a) Condição de contorno de Dirichlet

$$\psi = \psi_0, \quad \text{em } \Gamma_D \quad (2.19)$$

b) Condição de contorno de Neumann

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} + \vec{B}r \cdot \vec{n} = g \quad , \quad \text{em} \quad \Gamma_N \quad (2.20)$$

$$\text{e } \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

Normalmente, a condição de Neumann é homogênea com $g \equiv 0$. Além disso, o campo magnético é perpendicular a Γ_D , pois

$$\vec{H} \wedge n = -\text{Grad } \psi \wedge \vec{n} = 0$$

2.2.2 O potencial vetor na solução de problemas magnetostáticos

Ao abordar-se um problema no qual existem correntes no domínio de estudo Ω , é necessária a utilização do potencial vetor \vec{A} , tal que

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} \quad (2.21)$$

Substituindo-se (2.21) em (2.12),

$$\text{Rot } \nu \text{ Rot } \vec{A} = \vec{J} + \text{Rot } (\nu \vec{B}r) \quad (2.22)$$

onde ν é a relutividade magnética dada por

$$\nu = \frac{1}{\mu}$$

Como antes, a substituição de (2.21) em (2.13) justifica esta formulação. A equação (2.22) descreve o comportamento da solução no domínio de estudo, exceto nos pontos de descontinuidade de ν . Neste caso, são válidas as seguintes relações:

$$[Rot \vec{A}] \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.23)$$

$$[\nu(Rot \vec{A} - \vec{B}r)] \wedge \vec{n} = 0 \quad (2.24)$$

A equação (2.23) significa que a componente normal de $Rot \vec{A}$ é contínua na interface entre regiões com permissividades diferentes, enquanto que (2.24) implica na descontinuidade da componente tangencial de $Rot \vec{A}$. A equação (2.23) é satisfeita automaticamente para um potencial com componentes tangenciais contínuas.

Finalmente, nas fronteiras são especificadas as seguintes condições de contorno:

a) Condição de contorno de Dirichlet:

$$A \wedge \vec{n} = a \wedge \vec{n} \quad , \quad \text{em} \quad \Gamma_D, \quad (2.25)$$

b) Condição de contorno de Neumann;

$$\nu(Rot \vec{A} - \vec{B}r) \wedge \vec{n} = h \wedge \vec{n} \quad , \quad \text{em} \quad \Gamma_N, \quad (2.26)$$

É importante notar que a equação (2.22) com as condições de contorno (2.25) e (2.26) não tem assegurada a unicidade da solução potencial vetor (Jackson, 1983, Mesquita, 1990). De fato, seja a seguinte perturbação sobre o potencial:

$$\vec{A}^* = \vec{A} + Grad \psi \quad (2.27)$$

com

$$\psi = \psi_0, \text{ em } \Gamma_D$$

tem-se, como resultado

$$Rot(\nu Rot \vec{A}^*) = Rot(\nu Rot \vec{A}) \text{ em } \Omega \quad (2.28)$$

pois $Rot(Grad \psi) = 0$

e, ainda;

$$\vec{A}^* \wedge \vec{n} = \vec{A} \wedge \vec{n} + (Grad \psi) \wedge \vec{n} = \vec{A} \wedge \vec{n} \text{ sobre } \Gamma_d \quad (2.29)$$

e, finalmente:

$$\nu(Rot \vec{A}^* - \vec{B}r) \wedge \vec{n} = \nu(Rot \vec{A} - \vec{B}r) \wedge \vec{n} \text{ sobre } \Gamma_n \quad (2.30)$$

Para superar esta dificuldade, deve-se impor a condição adicional $Div \vec{A} = d$, pois a menos que o rotacional e o divergente de um vetor estejam definidos, poderão existir múltiplas soluções diferindo pelo gradiente de um escalar (Hoole, 1989). Em problemas bidimensionais, isto na realidade não chega a ocorrer, pois \vec{A} possui somente sua componente perpendicular ao plano OXY \vec{A}_z , e daí a condição $Div \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = 0$ está implicitamente estabelecida. Em problemas tridimensionais esta condição deve ser acrescentada explicitamente (Mesquita, 1990; Holle et al., 1988; e Mohamed et al., 1982).

2.3 Estabelecimento do problema de valor de contorno

Nesta seção é estabelecida formalmente a formulação clássica para a equação (2.12) utilizando-se o potencial escalar.

Considerando-se que na região Ω não existam correntes, o problema consiste em achar o potencial ψ que satisfaz (ver capítulo 1):

a) A equação (2.16) nos pontos regulares do domínio Ω .

$$\text{Div}(\mu \text{Grad } \psi) = \text{Div } \vec{B}r$$

b) A condição de salto (2.17) na interface entre regiões de diferentes permeabilidades.

$$\vec{n} \cdot [-\mu \text{Grad } \psi + \vec{B}r] = 0$$

c) A condição de contorno de Dirichlet (2.19)

$$\psi = \psi_0$$

d) A condição de contorno de Neumann (2.20)

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} + \vec{B}r \cdot \vec{n} = g$$

2.4 Método de Galerkin e o método dos elementos finitos

Aplicando-se os mesmos passos descritos no capítulo 1 ao problema definido na seção anterior, chega-se então a forma fraca do problema:

$$\int_{\Omega} \text{Grad } v (\mu \text{Grad } \psi - \vec{B}r) d\Omega = 0, \quad \forall v \in \hat{H}_0 \quad (2.31)$$

onde \hat{H}_0 é a classe das funções teste definida em (1.14).

A aplicação do método de Galerkin associado ao método dos elementos finitos é realizada discretizando-se o domínio do problema em uma nuvem de nós os quais são topologicamente conectados formando-se assim uma malha de elementos finitos. Em cada elemento são definidas as funções de base locais que gerarão por sua vez o espaço local de elementos finitos. Neste trabalho são utilizados elementos triangulares e tetraédricos, de primeira, segunda e terceira ordens, e elementos hexaédricos de primeira e segunda ordens, com funções de base hierárquicas, as quais são descritas no capítulo 4.

Assim, considerando-se uma malha de elementos hexaédricos de primeira ordem, o elemento de referência $\bar{\Omega}$ é um cubo, mapeado pelas funções base no elemento real Ω_e (fig. 2.1), tal que:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^8 \eta_j x_j \\ y &= \sum_{j=1}^8 \eta_j y_j \\ z &= \sum_{j=1}^8 \eta_j z_j \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde x_j , y_j e z_j são as coordenadas nodais.

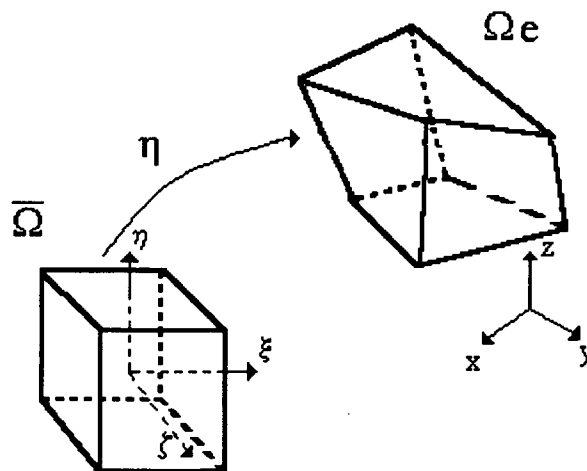


Figura 1.1 Elemento de referência $\bar{\Omega}$ mapeado pelas funções de base em um elemento hexaédrico real

As funções de base globais verificam a seguinte propriedade:

$$N^i(x_j, y_j, z_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.33)$$

Define-se agora as novas classes de funções admissíveis e funções teste:

$$\hat{H}^h = \left\{ u_h : u_h = \sum_{i=1}^N \psi_i N^i ; \psi_i = \psi_0 \quad \forall \text{ nó } i \in \Gamma_D \right\} \quad (2.34)$$

$$\hat{H}_0^h = \left\{ v_h : v_h = \sum_{i=1}^N v_i N^i ; v_i = 0 \quad \forall \text{ nó } i \in \Gamma_D \right\} \quad (2.35)$$

e assim, a aproximação por elementos finitos é dada por: ache $\psi_h \in \hat{H}^h$ de forma que:

$$\int_{\Omega} \mu \text{Grad } \psi_h \text{Grad } v_h d\Omega - \int_{\Omega} \vec{B}r \text{Grad } v_h d\Omega = 0 \quad , \quad \forall v_h \in \hat{H}_0^h \quad (2.36)$$

Substituindo-se as funções definidas em (2.34-2.35),

$$\int_{\Omega} \mu \sum_i (\text{Grad } N^i) \psi_i \cdot \text{Grad } N^j d\Omega - \int_{\Omega} \vec{B}r \cdot \text{Grad } N^j d\Omega = 0 \quad (2.37)$$

Retirando o somatório para fora da integral, (2.37) transforma-se em:

$$\sum_i \left[\int_{\Omega} \mu (\text{Grad } N^i) \cdot \text{Grad } N^j \psi_i d\Omega \right] - \int_{\Omega} \vec{B}r \cdot \text{Grad } N^j d\Omega = 0 \quad (2.38)$$

ou, representando na forma matricial, tem-se:

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} \psi_i = F_j \quad (2.39)$$

onde

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \mu (\text{Grad } N^i) \cdot \text{Grad } N^j d\Omega \quad (2.40)$$

$$F_j = \int_{\Omega} \vec{B}r \cdot \text{Grad } N^j d\Omega \quad (2.41)$$

ou seja, K_{ij} é a matriz de contribuição local, e F_i é a matriz fonte.

Finalmente, as matrizes de contribuições locais são "condensadas" em um sistema matricial global onde todos os nós da malha são considerados, o qual por sua vez é resolvido por um método de solução de sistemas lineares.

2.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas diversas formulações para resolução de problemas lineares estáticos em eletromagnetismo. Mostrou-se também como pode ser obtida a forma fraca para estes problemas e como esta é resolvida pelo método dos elementos finitos.

Deve-se notar que a aplicação do método dos elementos finitos consiste em uma sequência de etapas que vão desde a escolha do modelo matemático adequado até a análise e interpretação dos resultados (Duarte, 1991). No entanto, estas etapas são baseadas em aproximações que geram diferentes fontes de erros associados a solução obtida pelo analista. Entre as fontes de erros pode-se citar:

a) Erros na escolha do modelo matemático: Este erro é definido como a diferença entre a solução exata do modelo matemático e o valor medido no sistema físico modelado no ponto correspondente.

Em problemas eletromagnéticos, um caso clássico é o erro causado pela inserção das condições de contorno. Um estudo detalhado deste tipo de erro no método dos elementos finitos, bem como métodos para minimiza-lo podem ser encontrados em (Medeiros, 1994).

b) Erros de arredondamento: Este erro é causado pelos limites na precisão computacional do equipamento utilizado.

c) Erros de discretização: este tipo de erro representa a diferença entre a solução exata do modelo matemático e a solução aproximada pelo método utilizado para se resolver o modelo, como o

método dos elementos finitos. Neste caso, o erro é causado pelo uso de um número finito de graus de liberdade no sistema discretizado.

No próximo capítulo, será abordado o problema de discretização em malhas ótimas de elementos finitos, e serão analisadas as três versões adaptativas e suas respectivas taxas de convergência.

Capítulo 3

Procedimentos adaptativos, definições e conceitos

3.1 Introdução

Nos capítulos anteriores o método dos elementos finitos foi descrito como um método de solução de problemas de valor de contorno, e seu emprego em magnetostática foi apresentado.

Um dos objetivos era de estabelecer relações entre o erro de elementos finitos e a malha utilizada, bem como a ordem das funções de interpolação. Neste capítulo as versões adaptativas apresentadas na introdução serão discutidas tendo-se a convergência de cada uma como referência. Também é apresentado o conceito de malhas ótimas.

3.2 Definição de malha ótima

Define-se como malha ótima aquela que para um dado número de graus de liberdade fornece um erro mínimo medido em uma determinada norma. Obviamente, esta malha é dependente do tipo de elemento usado (Gago et al, 1983).

Assim, o erro mínimo(ótimo) é obtido através de uma distribuição ótima do diâmetro h dos elementos e da ordem p das funções de forma, as quais podem ser distribuídas não uniformemente.

De acordo com o que foi visto no capítulo 1, sabe-se que o erro de discretização tende a zero a medida em que o número de graus de liberdade da malha tende ao infinito. Entretanto, o problema real consiste em encontrar, para um número máximo dado de graus de liberdade, qual a distribuição de h e p necessária para se atingir o mínimo erro.

Com este objetivo, defina-se então a densidade de erro local φ_e (Rachowicz et al, 1989) de forma que:

$$\begin{aligned}\varphi_e &= \varphi_e(h, p) \\ \theta_e &= \int_{\Omega_e} \varphi_e(h, p) d\Omega_e\end{aligned}\tag{3.1}$$

logo, a densidade de erro local é uma função da ordem e do diâmetro do elemento. Assim, o erro sobre a malha Ω_h pode ser descrito pelo funcional abaixo:

$$J(h, p) = \sum_{\Omega_e \in \Omega_h} \int_{\Omega_e} \varphi_e(h, p) d\Omega_e\tag{3.2}$$

Seja agora η a função densidade graus de liberdade, tal que $\eta = \eta(h, p)$. Assim, o número total de graus de liberdade N é dado por:

$$N = \int_{\Omega_h} \eta(h, p) d\Omega_h\tag{3.3}$$

A malha ótima para um número fixo de graus de liberdade $N = N^*$ definida pela distribuição de h e p (h^*, p^*) satisfaz:

$$J(h^*, p^*) = \min_{\int_{\Omega_h} \eta(h, p) d\Omega_h = N^*} J(h, p)\tag{3.4}$$

Impõe-se N^* como uma restrição no método dos multiplicadores de Lagrange, cujo lagrangeano é:

$$L = J(h, p) - \lambda \left(\int_{\Omega_h} \eta(h, p) d\Omega_h - N^* \right)\tag{3.5}$$

Daí, pode se escrever as condições ótimas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_e}{\partial h} - \lambda \frac{\partial \eta}{\partial h} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_e}{\partial p} - \lambda \frac{\partial \eta}{\partial p} &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

de forma que

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial h} = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial h} \quad e \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial p} = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial p}$$

e então, para a malha inteira tem-se:

$$\left. \frac{d\varphi_e}{d\eta} \right|_{p=cte} = \lambda = const \quad e \quad \left. \frac{d\varphi_e}{d\eta} \right|_{h=cte} = \lambda = const\tag{3.7}$$

Pode-se agora traçar algumas linhas para direcionamento de um processo adaptativo. A equação (3.7) sugere que para uma ótima distribuição de h e p , a quantidade $\Delta_{erro}/\Delta_{ndl}$, com Δ_{erro} significando a variação no erro devida a uma variação no número de graus de liberdade Δ_{ndl} , deveria ser constante ao longo da malha.

Considerando-se agora apenas o refinamento h mantendo-se p constante sobre uma malha retangular, tem-se:

$$\theta_e(h, p) = \theta_e(h) = \int_{\Omega_e} f(x, y) h^\sigma d\Omega_e\tag{3.8}$$

$$\eta(h, p) = \eta(h) = \frac{1}{h^2}\tag{3.9}$$

onde $f(x, y)$ é uma função da distribuição do erro e $\varphi_e = f(x, y)h^\sigma$. Assim, (3.6) reduz-se a:

$$\sigma f(x, y) h^{\sigma-1} + 2h^{-3} \lambda = 0\tag{3.10}$$

integrando-se (3.10) sobre um elemento, tem-se que:

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) h^\sigma d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \frac{-2h^{-2}}{\sigma} \lambda d\Omega_e = \frac{-2}{\sigma} \lambda \quad (3.11)$$

pois $\int_{\Omega_e} h^{-2} d\Omega_e = 1$. Dai, tem-se como resultado que em uma malha ótima o erro é distribuído igualmente na malha. Rachowicz (Rachowicz et al, 1989) considerando uma malha hipotética onde $\eta(p, h) \cong p^2/h^2$ deduz que as condições ótimas ocorrem para uma equidistribuição igual a 2λ .

3.3 Procedimentos adaptativos no método dos elementos finitos

No capítulo 1 foi visto que a solução do problema variacional

$$B(u_h, v_h) = f(v_h) \quad , \quad \forall v_h \in S^h \quad (3.12)$$

satisfaz:

$$\|u - u_h\|_E = \min \|u - w\|_E \quad , \quad \forall w \in S^h \quad (3.13)$$

Ou seja, a solução u_h é a melhor aproximação em S^h , o qual está caracterizado pelos dois parâmetros h e p , o comprimento dos elementos da malha e a ordem das funções de forma em seu interior. Assim, $S^h = S^h(h, p)$, e para melhorar a precisão de u_h deve-se estender S^h . Os meios utilizados para se atingir este objetivo são denominados procedimentos adaptativos, ou auto adaptativos, quando pouca ou nenhuma interação com o usuário é necessária para ativar e controlar o processo (Gago et al. 1983).

Na sequência deste capítulo, as estratégias adaptativas h , p e h - p serão analisadas enfocando-se principalmente suas características de convergência.

3.3.1 Versão h

Nesta versão, a ordem polinomial p é mantida constante e aumenta-se a dimensão de S^h fazendo-se $h \rightarrow 0$. Neste caso, a estimativa de erro medido na norma de energia é dada por (Szabo & Babuska, 1991; Babuska&Szabo,1982):

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{K}{N^\beta} \quad (3.14)$$

onde K e β são constantes positivas (β é a taxa de convergência) e N é o número de graus de liberdade.

Se o refinamento da malha é uniforme ou quase uniforme, β é dado por:

$$\beta = \frac{1}{2} \min(p, \lambda_r) \quad (3.15)$$

onde λ_r é definido como a regularidade da solução.

Se a solução é bastante regular(não existem singularidades na região que está sendo estudada), com $\lambda_r > p$, a taxa de convergência é limitada pela ordem polinomial das funções de forma.

Por outro lado, quando a malha é refinada adaptativamente com base em indicadores de erro locais calculados sobre a solução obtida com a malha precedente, a taxa de convergência é (Szabo & Babuska, 1991):

$$\beta = \frac{1}{2} p \quad (3.16)$$

3.3.2 Versão p

Aqui, a malha é mantida constante quanto a h , e p é incrementado, ou seja, faz-se $p \rightarrow \infty$.

Quando não existem singularidades no domínio e a solução é regular, a taxa de convergência é exponencial:

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{K}{e^{\gamma N^\theta}} \quad (3.17)$$

onde K , γ e θ são constantes positivas e $\theta \geq \frac{1}{2}$ (Szabo & Babuska, 1991).

Quando existem pontos singulares, a taxa de convergência passa a ser algébrica. A estimativa de erro é então da forma de (3.14) e β depende da posição da singularidade em relação aos nós da malha:

a) Se o ponto singular não é um ponto nodal, então tem-se:

$$\beta = \frac{1}{2} \lambda_r \quad (3.18)$$

Note-se que neste caso a taxa de convergência é exatamente a mesma que no caso da versão h , já que $p \geq \lambda_r$.

b) Quando o ponto singular é um ponto nodal, tem-se para β :

$$\beta = \lambda_r \quad (3.19)$$

Na maioria dos casos, o ponto de singularidade é um vértice, uma mudança brusca nas propriedades do meio ao longo do contorno ou uma mudança abrupta nas condições de contorno. Portanto, (3.19) é tipicamente a taxa de convergência da versão p quando u não é regular.

3.3.3 versão h - p

Neste caso, h e p são simultaneamente incrementados. Na realidade, trata-se de uma combinação das versões p e h . Pode-se também aplicar a versão h seguida da versão p .

A principal vantagem desta versão adaptativa é que taxas de convergência exponenciais podem ser atingidas, mesmo nos casos em que a solução é não regular, desde que uma sequência de malhas e uma distribuição polinomial sejam apropriadamente selecionados (Szabo&babuska, 1991). Então, a estimativa de erro é da forma (3.17).

Nesta versão, as malhas e a distribuição de p são executados da seguinte forma: No caso de soluções bastantes regulares, a malha é discretizada grosseiramente e p é distribuído uniformemente. Quando existem pontos singulares, a malha é fortemente refinada nas proximidades deste pontos, e aos maiores elementos são dados os maiores valores de p , e contrariamente, aos elementos menores p tem seu menor valor.

Assim, a versão $h-p$ fornece a maneira mais eficiente para o controle do erro no caso geral. Ela combina as propriedades da versão h com refinamento apropriado, na qual a taxa de convergência é independente da regularidade da solução, com a convergência característica da versão p quando a solução é regular.

Observações:

1) Nas estimativas acima, o erro é medido usando-se a norma da energia. O motivo é que a solução de elementos finitos é aquela que minimiza um certo funcional energético para cada problema, sendo então uma medida natural para o erro. O erro medido nesta norma é dado por:

$$\|e\|_E^2 = \int_{\Omega} ((\text{Grad } e)^2) d\Omega$$

2) na utilização das versões p ou $h-p$, o uso de funções de interpolação hierárquicas é extremamente atraente, pois neste caso o tratamento de nós não conformes é extremamente simples, dada as características deste tipo de funções. Além disso, a própria estimativa de erro pode ser realizada usando-se este tipo de funções (Zienkiewicz & Craig, 1986).

3.4 Controle de refinamento com a versão h - p

É possível projetar seqüências de refinamento de malhas e de distribuições de p para as quais a taxa de convergência mesmo na presença de singularidades é arbitrariamente grande, podendo inclusive ser exponencial. Como estas seqüências dependem da função aproximada, na prática elas podem ser determinadas somente adaptativamente (Babuska & Szabo, 1982). Com base no que foi discutido na seção 3.2, Rachowicz (Rachowicz et al. 1989) sugere que uma estratégia adaptativa ótima deveria escolher uma seqüência de refinamentos h - p na qual a variação do erro por aumento do número de graus de liberdade seja maximizada em cada iteração. Para isto, o algoritmo deve ser capaz de avaliar a variação do erro em função do refinamento na discretização ou da elevação da ordem polinomial, em cada elemento, a cada passo iterativo, sendo que o máximo destes valores determinará o tipo de refinamento, h ou p . Dada a complexidade envolvida na implementação de uma tal estratégia, propomos neste trabalho a execução do processo adaptativo em duas etapas. Inicialmente, em uma malha grosseiramente discretizada, refina-se com a versão h até que a variação do erro devida aos refinamentos diminua consideravelmente. Assim, processos de desrefinamentos não são necessários e obtém-se uma forte discretização em pontos singulares e grandes elementos em regiões onde o problema é regular. Na segunda etapa a versão p é aplicada, até que o erro caia abaixo de um limite especificado (Vanti et al, 1997). Com esta estratégia é possível manter-se uma alta taxa de convergência ao longo do processo adaptativo.

3.5 Conclusões

Para finalizar este capítulo, os principais resultados quanto a taxa de convergência nas diferentes versões adaptativas são resumidos.

- 1) A taxa de convergência depende da regularidade da função aproximada e da ordem das funções polinomiais utilizadas na aproximação.

2) Na versão h a taxa de convergência é dada pelo menor dos valores $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}\lambda)$ se malhas uniformes ou quase uniformes são utilizadas. Quando existe singularidade em algum vértice da malha, pode-se construir seqüências de refinamentos não uniformes onde a taxa de convergência depende apenas de p .

No próximo capítulo serão abordados alguns métodos de estimação "a-posteriori" de erros no método dos elementos finitos.

Capítulo 4

Funções de base hierárquicas

4.1 Introdução

Na versão tradicional do método dos elementos finitos a solução do problema é aproximada por um somatório do tipo seguinte:

$$u \approx u_h = \sum_{i=1}^m N^i a_i \quad (4.1)$$

onde a_i são as funções que serão determinadas no processo de cálculo e N^i são as funções de base globais construídas pelo método dos elementos finitos. Nesta representação $u_h|_i$ (u_h sobre o nó i) $= a_i$, ou seja, as variáveis nodais possuem um senso físico claro representando cada uma o valor nodal da variável física aproximada. Esta é uma vantagem evidente deste tipo de aproximação.

Entretanto, em um processamento adaptativo baseado na versão p , ocorre que a cada ordem de interpolação corresponde um conjunto de funções de base completamente diferente do que aquele correspondente a uma ordem diferente. Como resultado tem-se interfaces não conformes entre elementos de ordens de interpolação diferentes, e a cada iteração adaptativa a matriz de rigidez é totalmente modificada.

Por outro lado, os elementos hierárquicos possuem a propriedade de as funções de base de uma determinada ordem corresponderem a um subconjunto das funções de ordens mais altas. Por isto, os elementos hierárquicos são bem adaptados para aplicações em versões adaptativas p .

Neste capítulo, estas funções de base serão analisadas em maiores detalhes para diversos tipos de elementos.

4.2 Características dos elementos hierárquicos

Nesta seção algumas características essenciais desta família de elementos são listadas abaixo e discutidas.

i) O embutimento das funções de forma ocasiona aquele da matriz de rigidez e do vetor do lado direito. De fato, supondo-se que foi resolvido o seguinte sistema de equações em um primeiro passo:

$$K_{hh}u_h = F_h \quad (4.2)$$

onde K_{hh} é a matriz construída com elementos de uma determinada ordem de interpolação. Se a ordem é elevada em um novo passo adaptativo, o sistema matricial agora torna-se:

$$\begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hH} \\ K_{Hh} & K_{HH} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_h \\ u_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_h \\ F_H \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Esta particularidade pode ser aproveitada vantajosamente. A solução u_h correspondente a uma determinada malha pode inicializar o sistema (4.3) para abreviar o processo de cálculo. Além disso, as matrizes resultantes do processo de integração podem ser conservadas e inseridas na iteração seguinte. Finalmente, esta característica sugere que as variáveis hierárquicas podem ser em um certo sentido definidas como o erro de aproximação que será corrigido com o refinamento hierárquico. Com efeito, admitindo-se a aproximação $u_h = \tilde{u}_h$, então a segunda equação no sistema (4.3) (Definida pela segunda linha no sistema) corresponde ao resíduo da equação diferencial e pode ser utilizado para estimação de erros.

ii) A utilização de funções hierárquicas resulta em sistemas de equações mais bem condicionados que quando funções tradicionais são usadas, devido a natural ortogonalidade dos polinômios de

Legendre utilizados. Este resultado é bastante tratado na literatura, na análise de elementos retangulares (Zienkiewicz et al, 1983), (Mandell, 1990). A análise do condicionamento de malhas com elementos triangulares é quase inexistente na literatura, mas os resultados obtidos neste trabalho levam a concluir que a regra continua válida, embora a diferença para os elementos tradicionais seja menor.

iii) Uma vantagem fundamental dos elementos hierárquicos é que as funções são perfeitamente conformes na interface entre elementos com ordens de interpolação p e $p+i$, resultando em uma aproximação contínua, até a ordem p . É então suficiente anularem-se os graus de liberdade de ordens maiores que p ao longo da interface comum. Esta técnica é discutida em mais detalhes no capítulo 6.

iv) A qualidade da aproximação por elementos finitos depende da ordem das funções de forma utilizada nos elementos e da malha. Como as funções hierárquicas e as lagrangeanas, em uma dada ordem, geram o mesmo espaço, a qualidade de aproximação é também a mesma. (Babuska & Noor, 1986).

v) A principal desvantagem é que seus coeficientes não representam as variáveis físicas aproximadas, o que acarreta dificuldades para imposição das condições de contorno, assim como para o tratamento de interfaces entre regiões com potencial escalar total e reduzido.

4.3 Funções de forma 1D e significado dos coeficientes hierárquicos

Seja a seguinte interpolação padrão para elementos finitos 1D de primeira ordem:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.4)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.5)$$

Agora, a ordem de interpolação é elevada adicionando-se o termo de segunda ordem

$$N_3(\xi) = (1 - \xi^2) \quad (4.6)$$

Assim, a solução é aproximada como:

$$u_h(\xi) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (4.7)$$

onde N_1, N_2 , e N_3 são dadas por (4.4-4.6) e mostradas na figura 4.1.

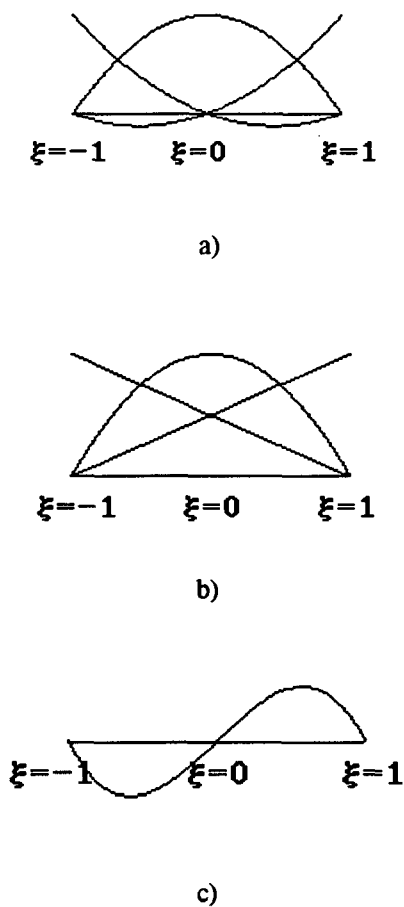


Fig. 4.1. Funções de forma para o elemento unidimensional: a) lagrangeana, segunda ordem, b) hierárquica, segunda ordem e c) hierárquica, termo de terceira ordem.

Note que $N_3(-1) = N_3(1) = 0$ e $N_3(0) = 1$, portanto,

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_h(-1) \\
u_2 &= u_h(1) \\
u_3 &= u_h(0) - \frac{(u_1 + u_2)}{2}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Logo, u_3 é o afastamento entre a parábola dada por N_3 em $\xi=0$ e a linearidade dada pela média dos termos de primeira ordem (fig. 4.1. b)

Estas considerações implicam a existência de uma transformação linear mapeando as variáveis hierárquicas na solução nodal em uma aproximação lagrangeana, necessária para a imposição das condições de contorno. Se a condição imposta é constante em uma parte do contorno, considerando-se (4.8) é então suficiente fazer $u_3 = 0$, tendo sido esta a técnica utilizada neste trabalho.

4.4 A interpolação para os elementos triangulares

Em todos os casos (1D,2D e 3D) os polinômios hierárquicos utilizados foram deduzidos por integração de polinômios de Legendre (Zienkiewicz, 1990):

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} \left[(\xi^2 - 1)^p \right] \tag{4.9}$$

A integração em relação a ξ tem como resultado:

$$N_k^e = \int P_p(\xi) d\xi = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^{p-1}}{d\xi^{p-1}} \left[(\xi^2 - 1)^p \right] \tag{4.10}$$

Os polinômios de Legendre satisfazem ainda a condição de ortogonalidade seguinte (Babuska & Szabo, 1981):

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi) \cdot P_j(\xi) \cdot d\xi = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{2}{2i+1} & i = j \end{cases} \tag{4.11}$$

Dai o bom condicionamento das matrizes geradas com funções hierárquicas.

No elemento triangular, tem-se N_1 , N_2 e N_3 , funções lineares para cada vértice do triângulo. Para a construção das funções de ordens superiores, recorre-se ao método seguinte para cada aresta do triângulo. Por exemplo, para a aresta 1 - 2, tem-se $N_3=0$ e daí

$$N_1 + N_2 = 1 \quad (4.12)$$

Tomando-se $\hat{\xi}$ como a coordenada unidimensional definida ao longo da aresta, pode-se escrever que:

$$N_1|_{1-2} = \frac{1}{2}(1 - \hat{\xi}) \quad N_2|_{1-2} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\xi}), \quad (4.13)$$

e assim,

$$\hat{\xi} = (N_2 - N_1)|_{1-2} \quad (4.14)$$

É suficiente agora substituir-se $\hat{\xi}$ em (4.10) para cada aresta do elemento para obter-se as funções hierárquicas de arestas em termos das funções lineares N_1 , N_2 e N_3 . Como exemplo, as funções para um triângulo de segunda ordem são N_1 , N_2 , N_3 , $4N_1N_2$, $4N_2N_3$ e $4N_3N_1$. Neste trabalho algumas variações foram experimentadas e o conjunto N_1 , N_2 , N_3 , N_1N_2 , N_2N_3 e N_3N_1 (sem o fator 4 nas funções de segunda ordem) apresentou em todos os testes realizados a mesma precisão na solução obtida, mas resultando sempre em matrizes melhores condicionadas. As funções internas, para $p \geq 3$, podem ser obtidas multiplicando-se polinômios de Legendre. Uma expressão geral é dada por (Szabo and Babuska, 1981)

$$N_i^0 = N_1N_2N_3P_{p-i-2}(N_2 - N_1)P_{i-1}(2N_3 - N_1) \quad i = 1, 2, 3, \dots, p-2 \quad (4.15)$$

Em um triângulo hierárquico existirão as seguintes funções:

- 1) 3 funções nodais;
- 2) $3(p-1)$ funções de aresta;
- 3) $(p-1)(p-2)/2$ funções internas, ou funções bolhas.

Observações:

1) A concordância das funções de mesma ordem nas arestas entre elementos adjacentes deve ser garantida para que a aproximação seja contínua. No caso dos elementos hierárquicos, as funções de ordem ímpar definidas sobre as arestas apresentam uma incompatibilidade de sinais que deve ser eliminada. Para o elemento triangular de terceira ordem a função definida sobre a aresta é da forma:

$$N_4^{(i,j)} = KN_i N_j (N_j - N_i) \quad (4.16)$$

onde i,j correspondem aos nós definindo a aresta do elemento. É evidente que com um sentido único de orientação dos elementos, $N_4^{(i,j)}$ terá valores opostos ao longo da aresta para os dois elementos que a dividem. A solução utilizada nesta implementação é simples e consiste em substituir K em (4.16) pelo multiplicador definido por

$$K^* = K \cdot \frac{i-j}{|i-j|} \quad (4.17)$$

2) Funções internas são também chamadas neste trabalho de funções bolhas, por anularem-se nos nós extremos(1D), arestas (2D) ou faces (3D).

4.5 A interpolação para o elemento tetraédrico

Neste caso, para cada face do elemento as funções são obtidas exatamente da mesma maneira que no elemento triangular. Para as funções internas, a seguinte expressão geral pode ser utilizada (Szabo and Babuska, 1981):

$$N_m^0 = N_1 N_2 N_3 N_4 P_i (N_2 - N_1) P_j (2N_3 - 1) P_k (2N_4 - 1) \quad (4.18)$$

$$i, j, k = 1, 2, \dots, p-4; i + j + k = p-4$$

onde $m=m(i,j,k)$ depende da convenção de numeração das funções.

Assim, existirão para o elemento tetraédrico:

- 1) 4 funções nodais;
- 2) $6(p-1)$ funções de arestas;

- 3) $2(p-1)(p-2)$ funções de faces e
- 4) $(p-1)(p-2)(p-3)/6$ funções internas.

4.6 O condicionamento das equações

Com o objetivo de comparar-se os condicionamentos das matrizes resultantes da integração de problemas com elementos lagrangeanos e hierárquicos, foi utilizado um problema muito simples, para o qual foi gerada inicialmente uma malha composta de dois elementos e posteriormente refinada (figura 4.2). O número de condição foi calculado para cada malha considerando-se a matriz sem qualquer forma de précondicionamento. Os cálculos foram efetuados com a ajuda do “software” MATLAB.

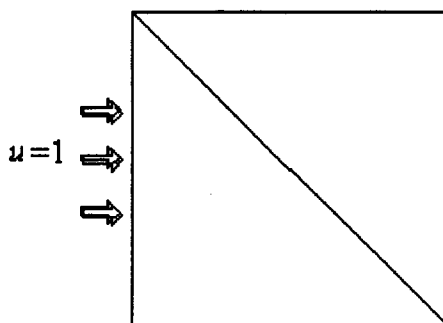


Figure 4.2 Problema para avaliação do condicionamento.

Na tabela abaixo pode ser confirmado que , embora os valores iniciais sejam muito próximos, a diferença entre o número de condicionamento para elementos de segunda ordem aumenta com o refinamento da malha, com melhor desempenho para os elementos hierárquicos. Este resultado está de acordo com as expectativas, embora exista aparentemente uma perda de ortogonalidade em elementos triangulares, quando comparados aos testes equivalentes para elementos retangulares.

Número de elementos	$p=1$	$p=2$ (lagrangeano)	$p=2$ (hierárquico)
2	3,00	27,5880	25,7558
8	20,1451	96,3788	83,4964
38	73,3056	338,5913	112,2493

Tabela 4.1. Condicionamento numérico.

4.7 Interpolação para elementos hexaédricos

Considere o elemento de referência hexaédrico $\overline{\Omega}$ da figura 4.3. O conjunto das funções de forma hierárquicas para este elemento é definido abaixo.

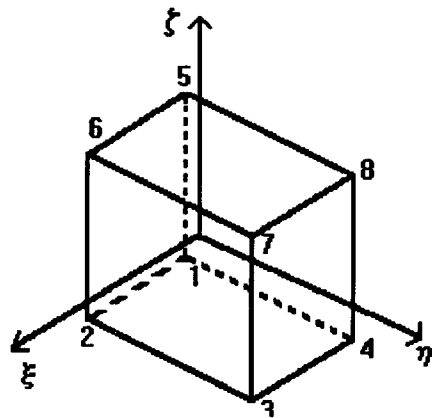


Figura 4.3 Elemento hexaédrico de referência

1) Funções de forma nodais: Existem oito funções nodais, que são as mesmas funções usadas no elemento tradicional lagrangeano trilinear de oito nós:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ &\vdots \\ N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned}$$

(4.19)

2) Funções associadas às arestas: existem $12(p-1)$ funções de arestas. As funções associadas com a aresta que conecta os vértices 1 e 2 são:

$$N_{i-1}^{(1,2)} = \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)\phi_i(\xi) \quad (i=2,3,\dots,p) \quad (4.20)$$

onde

$$\phi_i(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{i-1}(t) dt, \quad i=2,3,\dots,p \quad (4.21)$$

e $P_{i-1}(t)$ é o polinômio de Legendre de ordem $i-1$

de maneira análoga, as funções associadas com a aresta que conecta os vértices 2 e 3 são:

$$N_{i-1}^{(2,3)} = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\xi)\phi_i(\eta) \quad (i=2,3,\dots,p) \quad (4.22)$$

3) funções de face: Existem $3(p-2)(p-3)$ funções de face.

as funções de face associadas a face definida pelos vértices 1,2,5, 6, por exemplo, são:

$$N_m^{(1,2,5,6)} = \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_i(\xi)\phi_j(\zeta) \quad i,j=2,3,\dots,p-2 \quad i+j=4,5,\dots,p \quad (4.23)$$

onde $m=m(i,j)$.

4) Funções internas: existem $(p-3)(p-4)(p-5) / 6$ funções internas (funções bolha)

$$N_m^0 = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta)\phi_k(\zeta) \quad i,j,k=2,3,\dots,p-4 \quad i+j+k=6,7,\dots,p \quad (4.24)$$

onde $m=m(i,j,k)$.

Pode ser notado que as funções para o elemento hexaédrico são resultantes de produtos tensoriais de funções unidimensionais. Assim, elas podem ser computadas em uma subrotina genérica, em tempo de processamento, a qual efetua o produto das funções e devolve a função tridimensional de ordem pedida. Como a ordem pode ser arbitrária, deve ser estabelecida uma convenção de numeração de funções. A numeração das funções nodais é mostrada na figura (4.3) A subrotina apresentada abaixo é uma modificação daquelas apresentadas nos trabalhos de Devloo (Devloo, 1987) e Duarte (Duarte, 1991).

```
SUBROUTINE VLFNDR ( IOR, NNDEL, NUMPG , CORPG, COSPG, COTPG ,FUNRST,
DEVRST )
```

Interface de entrada

IOR - Ordem de interpolação no elemento.

NNDEL - Numero de nos do elemento.

NUMPG - Numero de pontos de integração.

Interface de saída

CORPG,COSPG,COTPG - Arranjos com as coordenadas dos pontos de integração.

FUNRST - Valores das funções nos pontos de integração.

DEVRST - Valores das derivadas das funções nos pontos de integração

Calcula as funções unidimensionais:

```
CALL VLFN1D ( NUMPG, CORPG, COSPG, COTPG , VALXI, VALET, VALZET, DRVLXI,
DRVLET, DRVLZT)
```

Obtém as funções tridimensionais por multiplicação:

```
CALL PROFUN (NUMPG, NNDEL, IOR, INDFN, VALXI, VALET, VALZET, DRVLXI,
DRVLET, DRVLZT , FUNRST, DEVRST)
```

```
END
```

Neste algoritmo, VALXI, VALET e VALZET são os arranjos de funções unidimensionais nos eixos ξ , η e ζ , respectivamente, e DRVLXI, DRVLET e DRVLZT suas derivadas. Assim a função de aresta 1-2 de segunda ordem e sua derivada é calculada como:

$$\text{FUNRST}(9) = \text{VALXI}(3) * \text{VALET}(1) * \text{VALZET}(1);$$

$$\text{DEVRST}(1,9) = \text{DRVLXI}(3) * \text{VALET}(1) * \text{VALZET}(1);$$

$$\text{DEVRST}(2,9) = \text{VALXI}(3) * \text{DRVLET}(1) * \text{VALZET}(1);$$

$$\text{DEVRST}(3,9) = \text{VALXI}(3) * \text{VALET}(1) * \text{DRVLZT}(1);$$

onde

$$\text{VALXI}(3) = \xi(\xi^2 - 1);$$

$$\text{VALET}(1) = \frac{1}{2} (1 - \eta);$$

$$\text{VALZET}(1) = \frac{1}{2} (1 - \zeta).$$

4.8 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as funções de base hierárquicas, e descreveram-se os elementos gerados com a interpolação baseada nesta família de funções do ponto de vista de sua caracterização assim como de aspectos de implementação. No próximo capítulo serão discutidas algumas técnicas e métodos para estimação de erros de discretização em elementos finitos, e será detalhado em especial o método empregado neste trabalho o qual é em parte baseado nas características das funções hierárquicas.

Capítulo 5

Estimativas "a posteriori" de erros de discretização no MEF.

5.1 Introdução

Este capítulo tratará de uma questão básica em análise eletromagnética computacional, a saber: Qual a precisão atingida com a aproximação efetuada ao modelar e solucionar um determinado sistema? Deve-se aperfeiçoar o modelo? A resposta a estas questões e os métodos utilizados para responde-las dizem respeito a um ponto crucial no desenvolvimento de esquemas adaptativos, os quais visam reduzir sistematicamente o erro ocasionado pela aproximação da solução real.

Nos capítulos 1 e 3 foram apresentadas algumas estimativas do erro de discretização no método dos elementos finitos. A clássica estimativa (1.39) é melhorada com o seguinte teorema (Babuska & Suri, 1990):

Teorema 5.1- seja $u \in H^k(\Omega)$, $k > 1$, e sejam também os espaços $S = S(h, p)$, baseados em uma família uniforme (ou quase uniforme) de malhas de elementos finitos. Assim, tem-se que:

$$\|u - u_h\|_E \leq Ch^\tau p^{-(k-1)} \|u\|_{H^k(\Omega)} \quad (5.1)$$

onde $\tau = \min(p, k - 1)$ e C é independente de τ, h e p .

Entretanto, estas são estimativas "a priori", pois são obtidas com base no espaço de elementos finitos no qual se trabalha. Para a implementação de um processo adaptativo é

necessário que se faça de alguma forma uma estimação "a posteriori" do erro de discretização, possibilitando assim o acesso ao erro global na malha e a uma indicação do erro em cada elemento, levando-se em consideração a natureza do problema. A dificuldade em se estimar os erros está no fato que em geral a única informação acessível para o analista é a própria solução aproximada. A busca de métodos de estimação "a posteriori" foi iniciada com os trabalhos de Babuska e sua equipe, (Babuska & Rheinboldt, 1978) e até os dias de hoje este tem sido o objeto principal de um grande número de artigos publicados. A análise e validação teórica de alguns estimadores é encontrada em Babuska et al, 1993a e 1993b.

A seguir são apresentados alguns estimadores dentre os mais populares encontrados na literatura.

5.2 Estimação "a posteriori" na norma de energia utilizando-se a análise assintótica (Szabo & Babuska, 1991)

No capítulo 3 a convergência da solução aproximada para a versão h foi colocada sob a forma seguinte:

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{K}{N^\beta} \quad (5.2)$$

onde K e β são constantes positivas e N é o número de graus de liberdade.

Defina-se o erro como $e \stackrel{def}{=} u - u_h$, e então pode-se mostrar que (Szabo & Babuska, 1991):

$$\|e\|_E^2 = J(u) - J(u_h) \quad (5.3)$$

onde $J(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - f(u)$ é o funcional de energia potencial associado. Daí,

$$\|e\|_E^2 \approx \frac{K^2}{N^{2\beta}} \quad (5.4)$$

Em (5.4) considerou-se que N é suficientemente grande de forma que o sinal de menor ou igual pudesse ser trocado pela igualdade. Assim, pode-se ter, considerando-se duas malhas com graus de liberdade N_p e N_{p-1} :

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_p) &= K_1 N_p^{-2\beta} \\ J(u) - J(u_{p-1}) &= K_2 N_{p-1}^{-2\beta} \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde substituiu - se u_h por u_p em (5.2). Supondo-se β conhecida e $K_1 = K_2$, $J(u)$ é dado por:

$$J(u) = \frac{J(u_{p-1})N_p^{-2\beta} - J(u_p)N_{p-1}^{-2\beta}}{N_p^{-2\beta} - N_{p-1}^{-2\beta}} \quad (5.6)$$

Como β é na realidade uma incógnita, são necessárias três soluções aproximadas para se conseguir estimar $J(u)$. A partir de (5.5) tem-se

$$\log \left[\frac{J(u) - J(u_{p-1})}{J(u) - J(u_p)} \right] = 2\beta \log \left[\frac{N_p}{N_{p-1}} \right] \quad (5.7)$$

e

$$\log \left[\frac{J(u) - J(u_{p-2})}{J(u) - J(u_{p-1})} \right] = 2\beta \log \left[\frac{N_{p-1}}{N_{p-2}} \right] \quad (5.8)$$

Desta forma,

$$\frac{\log \left[\frac{(J(u) - J(u_{p-1}))}{(J(u) - J(u_p))} \right]}{\log \left[\frac{(J(u) - J(u_{p-2}))}{(J(u) - J(u_{p-1}))} \right]} = \frac{\log \left(\frac{N_p}{N_{p-1}} \right)}{\log \left(\frac{N_{p-1}}{N_{p-2}} \right)} = Q \quad (5.9)$$

e finalmente

$$\frac{J(u) - J(u_{p-1})}{J(u) - J(u_p)} = \left[\frac{J(u) - J(u_{p-2})}{J(u) - J(u_{p-1})} \right]^2 \quad (5.10)$$

Esta estimativa é baseada na suposição que $J(u)$ converge monotonicamente. Para isto, entretanto, é necessário que o espaço de elementos finitos seja tal que $S_1^h \subset S_2^h \subset \dots \subset S_n^h$ onde os subscritos indicam em sua ordem crescente o incremento no número de graus de liberdade. Na versão p esta condição é facilmente satisfeita, mas nem sempre o é na versão h na qual pode ser bastante difícil fazer com que as malhas refinadas contenham as malhas precedentes completamente aninhadas. Além disso, este método pode ser usado somente como estimador do erro global, não sendo possível utilizá-lo para controlar o processo p -adaptativo, pois não fornece uma estimativa local do erro.

5.3 Estimativa baseada em formulações complementares

Este método utiliza os princípios variacionais complementares (Penman & Fraser, 1982; Rikabi, 1988) para obter duas soluções aproximadas para um determinado problema. Obtém-se assim um limite superior para o erro medido na norma da energia.

Aplicado a um problema magnetostático em uma região livre de correntes, a solução pode ser obtida resolvendo-se

$$\text{Div } \mu \text{ Grad } \psi = 0 \quad (5.11)$$

onde foi introduzido o potencial escalar de forma que $\vec{H} = -\text{Grad } \psi$.

Pode-se também resolver a equação para potencial vetor \vec{A} , $\vec{B} = \text{Rot } \vec{A}$, como abaixo:

$$\text{Rot } \frac{1}{\mu} \text{ Rot } \vec{A} = 0 \quad (5.12)$$

A dualidade entre estas duas formulações é evidenciada nos dois seguintes teoremas (Cendes & Shenton, 1985):

Teorema 5.2. O erro na solução do problema (5.11) é ortogonal em um senso energético ao erro na solução do problema (5.12).

Teorema 5.3. A energia da diferença entre as duas soluções complementares é um limite superior para as energias do erro em cada solução aproximada.

Embora este método estabeleça de forma elegante um limite superior para o erro, existem alguns inconvenientes, como a necessidade de se resolver dois sistemas sendo um procedimento bastante custoso e a dificuldade de implementação em problemas não laplacianos (Raizer, 1991).

5.4 Estimativas baseadas no cálculo de resíduos

5.4.1 Identificação do Erro

Considere a formulação variacional do problema de Poisson

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \text{Grad } u \cdot \text{Grad } v d\Omega$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

$$B(u, v) = f(v) + \int_{\Gamma_N} g v d\Gamma \quad (5.13)$$

onde $g = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$, em Γ_N

A solução aproximada por elementos finitos é da forma (Equação 4.1)

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i N^i$$

onde N_i são as funções de base globais.

A aproximação de (5.13) por elementos finitos é (Kelly et al., 1983):

$$B(u_h, N^j) = \int_{\Omega} \text{Grad } N^j \text{ Grad } u_h d\Omega - \int_{\Omega} f N^j d\Omega - \int_{\Gamma_N} g N^j d\Gamma \quad (5.14)$$

Integrando (5.14) por partes, e considerando que as funções de base são regulares dentro de cada elemento mas com derivadas descontínuas nas interfaces entre os mesmo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} -\text{Div}(\text{Grad } u_h) N_j d\Omega + \sum_{\Gamma_e \subset \Gamma} \int_{\Gamma_e} J\left(\frac{\partial u_h}{\partial \vec{n}}\right) N_j d\Gamma + \\ \sum_{\Gamma_{eN}} \int_{\Gamma_{eN}} \left(g - \frac{\partial u_h}{\partial \vec{n}}\right) N_j d\Gamma = \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} f N_j d\Omega \end{aligned} \quad (5.15)$$

ou

$$\sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} N_j r_e + \sum_{\Gamma_e \subset \Gamma} \int_{\Gamma_e} J\left(\frac{\partial u_h}{\partial \vec{n}}\right) d\Gamma + \sum_{\Gamma_{eN}} \int_{\Gamma_{eN}} \left(g - \frac{\partial u_h}{\partial \vec{n}}\right) d\Gamma = 0 \quad (5.16)$$

onde as contribuições de cada elemento foram somadas, e :

$r_e = -\text{Div}(\text{Grad } u_h) + f$ é o resíduo da equação de Poisson;

$J\left(\frac{\partial u_h}{\partial \vec{n}}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_h^*}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u_h}{\partial \vec{n}} \right]$ é o salto (descontinuidade) no fluxo normal no contorno interelementos;

u_h^* é a solução de elementos finitos nos elementos vizinhos;

Ω_e é para um elemento, sua extensão (1D), sua superfície (2D) ou seu volume (3D);

Γ é o contorno do problema;

Γ_e é o contorno do elemento, e

Γ_{eN} é o contorno do elemento o qual coincide com a parcela da fronteira onde é imposta condição de contorno de Newmann.

5.4.2 Indicador de erro de Babuska - Rheinboldt

Este indicador é baseado no cálculo da norma do resíduo local da equação diferencial e do salto no fluxo normal no contorno interelementos (Babuska & Rheinboldt, 1978).

$$\|e\|_E^2 = C_1 h_e^2 \int_{\Omega_e} r_e^2 d\Omega + C_2 h_e \int_{\Gamma_e} J_{\vec{n}}^2 d\Gamma \quad (5.17)$$

onde

r_e é o resíduo.

$J_{\vec{n}}$ é o salto do fluxo normal interelementos.

5.4.3 Métodos Baseados nas descontinuidades dos campos

Este método tem por base o cálculo direto da descontinuidade dos fluxos no contorno interelementos.

Em um problema magnetostático, as seguintes condições de continuidade devem ser verificadas (ver capítulo 1) na fronteira entre dois meios de diferentes propriedades constitutivas (fig. 5.1).

$$\begin{aligned} [\vec{B}] \cdot \vec{n} &= 0 \\ [\vec{H}] \wedge \vec{n} &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

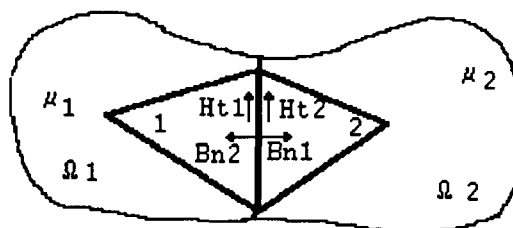


Figura 5.1. Condições de contorno entre dois elementos adjacentes

Estas condições deveriam ser verificadas em uma malha de elementos finitos, no contorno

entre dois elementos quaisquer . Entretanto, as condições (5.18) são violadas, a primeira quando se utiliza a formulação potencial escalar e a segunda com potencial vetor.

Assim, podem ser definidos os seguintes indicadores de erro local (Vanti, 1992):

a) Potencial escalar

$$\eta_e = \max_{\Gamma_e} \left| \int_{\Gamma_e \cap \Gamma} \frac{\vec{B}_{\vec{n}}^* - \vec{B}_{\vec{n}}}{\sum_{\Omega_e} \vec{B}_e} d\Gamma \right| \quad (5.19)$$

b) Potencial vetor

$$\eta_e = \max_{\Gamma_e} \left| \int_{\Gamma_e \cap \Gamma} \frac{\vec{H}_{\vec{t}}^* - \vec{H}_{\vec{t}}}{\sum_{\Omega_e} \vec{B}_e} d\Gamma \right| \quad (5.20)$$

onde $\vec{B}_{\vec{n}}^*, \vec{H}_{\vec{t}}^*$ e $\vec{B}_{\vec{n}}, \vec{H}_{\vec{t}}$ são a indução normal e o campo tangencial calculados nos elementos vizinhos e a indução normal e o campo tangencial no elemento em que se está calculando o erro, respectivamente.

Esta simplificação cometida reduzindo-se o cálculo do resíduo à sua parte singular é justificada por esta constituir a contribuição principal do erro em aproximações lineares (Gago et al., 1983), e os indicadores resultantes, além de serem de fácil implementação, são bastante eficientes na detecção de singularidades (Vanti et al, 1993). Por outro lado, o resíduo tem sua importância aumentada à medida em que a ordem de interpolação é incrementada, e os indicadores acima não são apropriados quando elementos de altas ordens são utilizados (Wen & Jiang, 1994). Além disso, ele não fornece uma estimação do erro, mas apenas uma indicação da intensidade das singularidades locais.

5.4.4 Método dos Resíduos nos Elementos (Oden et al, 1989)

Este método, no qual um problema local é resolvido a fim de se estimar o erro, é utilizado neste trabalho para governar o refinamento h - p . O desenvolvimento deste estimador está descrito em detalhes em (Oden et al, 1989), e é apresentado nesta seção.

Seja Ω_h como no capítulo 1 uma malha de elementos finitos Ω_e , e $\mathcal{Q}_p(\Omega_e)$ o espaço dos polinômios de ordem menor ou igual a p definidos sobre o elemento Ω_e . Então pode ser definida classe de elementos finitos seguinte:

$$V^h = \left\{ v_h \in H^1(\Omega) / v_h|_K \in \mathcal{Q}_p(\Omega_e), \Omega_e \in \Omega_h \right\} \quad (5.21)$$

e o correspondente espaço das funções de elementos finitos:

$$S^h = \left\{ v_h \in V^h / v_h = 0 \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (5.22)$$

É sabido que o erro $e = u - u_h$ satisfaz a condição de ortogonalidade (Ver capítulo 1)

$$B(e, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in S^h$$

onde u_h é a solução de elementos finitos, calculada sobre a malha Ω_h .

Considere-se agora que S^h é gerado com as funções de forma hierárquicas definidas no capítulo 4. Assim, é definido o espaço enriquecido S^H , tal que $S^h \subset S^H$ e daí pode-se escrever:

$$B(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in S^h \quad (5.23)$$

e

$$B(u_H, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in S^h \quad (5.24)$$

Logo,

$$B(u_H - u_h, v_h) = 0 \quad , \quad \forall v_h \in S^h \quad (5.25)$$

Tem-se assim o seguinte lema (Oden et al, 1989):

Lema 5.1 : Seja u a solução exata de (1.17) e u_H a solução aproximada correspondente ao subespaço refinado S^H . Então, para um elemento arbitrário $u_h \in V^h$ (correspondente a malha inicial), tem-se

$$\|e_h\|_E^2 = \|e_H\|_E^2 + \|E_h\|_E^2 \quad (5.26)$$

onde $E_h = e_H - e_h = u_h - u_H$ é o erro relativo, e e_H o erro referente ao espaço enriquecido.

Se o espaço S^H é consideravelmente maior que S^h , então $\|e_H\|_E^2$ será muito menor que $\|e_H - e_h\|_E^2$. É justificável, desta forma, estimar-se $\|e_H - e_h\|_E^2$ quando se quiser, na realidade, estimar $\|e_h\|_E^2$.

Seja agora a definição dos seguintes operadores restritos ao espaço V^H (Duarte, 1991):

a) Operador de interpolação local

$$\Pi_h : V^H(\Omega_e) \rightarrow V^h(\Omega_e) \quad (5.27)$$

b) Operador de interpolação global

$$\begin{aligned} I_h : V^H &\rightarrow V^h, \text{ tal que} \\ (I_h v_H)|_{\Omega_e} &= \Pi_h(v_H|_{\Omega_e}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para um dado elemento $\Omega_e \in \Omega_h$, considere-se agora o espaço $S^H(\Omega_e)$ das restrições de funções de S^H em Ω_e :

$$S^H(\Omega_e) = \{w_H = v_H|_{\Omega_e} / v_H \in S^H\} \quad (5.29)$$

Segue da dimensão finita de $S^H(\Omega_e)$ que

$$\|v_H - \Pi_h v_H\|_E^{\Omega_e} \leq C_{\Omega_e} \|v_H\|_E^{\Omega_e} \quad \forall v_H \in S^H(\Omega_e) \quad (5.30)$$

onde C_{Ω_e} depende dos parâmetros h e p sobre o elemento.

Seja também o espaço das funções “bolhas” definido por:

$$S^{\hat{H}} = \{u_H \in S^H / I_h u_H = 0\} \quad (5.31)$$

onde $S^{\hat{H}}$ pode também ser definido como:

$$S^{\hat{H}} = \left\{ v_H \in S^H / v_H|_{\Omega_e} \in S^{\hat{H}}(\Omega_e), \Omega_e \in \Omega_h \right\} \quad (5.32)$$

$$S^{\hat{H}}(\Omega_e) = \{v_H \in S^H(\Omega_e) / \Pi_h(v_H) = 0\} \quad (5.33)$$

e ainda o operador de projeção global

$$\begin{aligned} P_h \hat{H}_0 &\rightarrow S^{\hat{H}} \\ B(v_H - P_h v_H, w_H) &= 0, \quad \forall w_H \in S^{\hat{H}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

No contexto das funções de forma hierárquicas, para $p=2$ por exemplo, o espaço das funções “bolhas” é gerado pelos termos de segunda ordem.

Da condição de ortogonalidade (5.25) e da definição de P_h segue

$$\begin{aligned} \|E_h\|_E &= \sup_{v_H \in S^H} \frac{B(E_h, v_H)}{\|v_H\|_E} = \sup_{v_H \in S^H} \frac{B(E_h, v_H - I_h v_H)}{\|v_H\|_E} \\ &= \sup_{v_H \in S^H} \frac{B(P_h E_h, v_H - I_h v_H)}{\|v_H\|_E} \leq \sup_{v_H \in S^H} \frac{\|P_h E_h\|_E \|v_H - I_h v_H\|_E}{\|v_H\|_E}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Somando (5.30) para todos os elementos da malha, tem-se :

$$\|v_H - I_h v_H\|_E \leq C \|v_H\|_E \quad (5.36)$$

onde $C = \max_{\Omega_e \in \Omega_h} C_{\Omega_e}$.

Substituindo-se (5.36) em (5.35) tem-se:

$$\|E_h\|_E \leq C \|P_h E_h\|_E \quad (5.37)$$

Como P_h é uma projeção,

$$\|P_h E_h\|_E \leq \|E_h\|_E \quad (5.38)$$

É assim justificada a utilização da projeção P_h no espaço $S^{\circ H}$ como indicador de erro. Finalmente, partindo-se da condição de ortogonalidade para o erro e_H

$$B(e_H, v_H) = 0 \quad \forall v_H \in S^{\circ H} \quad (5.39)$$

desde que $S^{\circ H} \subset S^H$, então $P_h e_H = 0$ e chega-se ao seguinte resultado:

$$P_h(e_H - e_h) = P_h e_h \quad (5.40)$$

Isto é, o erro relativo projetado no espaço das funções “bolhas” é exatamente igual ao erro real projetado no mesmo espaço.

A estimativa da projeção do erro é agora calculada resolvendo-se o seguinte problema local:

$$\|P_h e_h\|_E \stackrel{\text{def}}{=} B(e_h, v_H) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} r_h v_H d\Omega + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_h^*}{\partial n} - \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v_H d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap N} \left[g - \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v_H d\Gamma \quad \forall v_H \in S^{\circ H} \quad (5.41)$$

onde $r_h = -\text{Div}(\text{Grad} u_h) + f$, é a forma ponderada do residuo e é equivalente a segunda equação em (4.3) (Kelly et al., 1983(a)), e os termos de contorno são definidos na seção 5.4.1. Com a utilização de funções hierárquicas, a base do espaço $S^{\circ H}(\Omega_e)$ é constituída apenas das funções que são adicionadas ao espaço S^H , quando a ordem de aproximação é elevada (Duarte, 1991), o que reduz consideravelmente a dimensão do problema a ser resolvido.

O problema (5.41) é calculado para cada elemento, e a energia do erro neste elemento é então computada como a contribuição local do erro. Neste trabalho utilizou-se a avaliação do problema (5.41) sobre um elemento ou sobre um grupo de elementos tal como mostra a figura 5.2 abaixo. Neste caso diz-se que o erro é avaliado em um subdomínio.

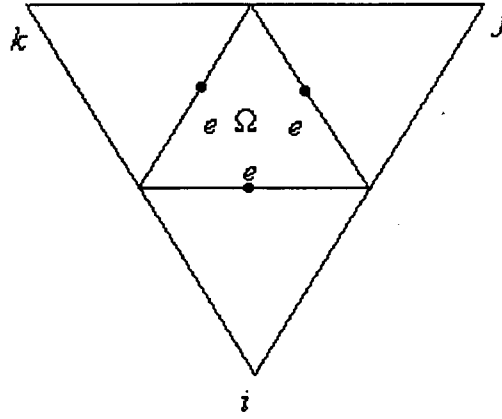


Figura 5.2 Subdomínio para estimativa de erro

Neste subdomínio, a solução calculada nos nós dos vértices é imposta no cálculo do resíduo em (5.41), onde o erro é calculado nos novos nós adicionados (figura 5.2).

5.5 Conclusão

Neste capítulo foram revisados alguns métodos de estimação de erros no método dos elementos finitos, e mostrou-se como os elementos hierárquicos podem ser utilizados para implementar-se um estimador de erros o qual é bastante atraente pelos seguintes fatos: É baseado em uma fundamentação matemática formal, calcula diretamente o erro podendo ser utilizado na estimação local e global e além disso não exige procedimentos de normalização especiais em função do meio em que é calculado.

No próximo capítulo é descrita a implementação de um sistema adaptativo h - p com atenção especial aos aspectos de refinamento de malha e da estrutura de dados necessária ao sistema.

Capítulo 6

Versão h - p , implementação e estrutura de dados

6.1 Introdução

Neste capítulo serão descritos os aspectos e detalhes de programação do sistema adaptativo h - p . O refinamento p de uma malha de elementos finitos ocasiona a geração de nós não conformes. O uso de elementos hierárquicos soluciona este problema, pois a continuidade da interpolação é restabelecida facilmente. Entretanto, em refinamentos h , se malhas hexaédricas são utilizadas, o problema torna-se mais complexo, e uma técnica especial de integração modificada deve ser empregada. Estes tópicos, assim como a estrutura de dados utilizada são discutidos neste capítulo.

6.2 Malhas regulares e não regulares

Malhas irregulares são geradas como resultado de refinamentos locais. Um nó é considerado regular se ele é um vértice de todos os elementos que o contenham. A malha é regular se todos os seus nós são regulares (Demkowicz & Oden, 1988). De outra forma, o nó é irregular e a malha é também classificada como irregular. Os graus de liberdade correspondentes são não conformes, e a aproximação torna-se descontínua. Neste caso, definimos ainda as malhas r -irregulares, onde r é o índice de irregularidade da malha e é dado pelo número máximo de nós irregulares sobre uma aresta de um elemento qualquer. Exemplos de malhas irregulares são apresentados na figura 6.1.

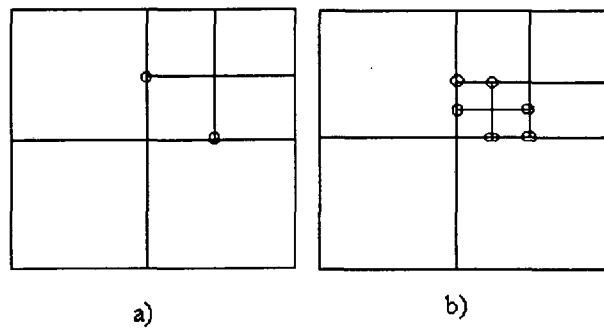


Figura 6.1 Exemplos de malhas irregulares a) 1-irregular; b) 2-irregular

Neste trabalho, o refinamento h é conduzido de maneira em que o índice de irregularidade da malha seja limitado em 1. Ou seja, somente malhas 1-irregulares são geradas. Existem pelo menos duas razões importantes para esta restrição. Primeiro, do ponto de vista prático, é bastante difícil trabalhar com malhas com índices de irregularidade maiores que 1 em métodos h - p . Outro motivo, apresentado por Demkowicz e Oden (Demkowicz & Oden, 1988), estabelece que a esparsidade da matriz de rigidez do problema é comprometida em grandes refinamentos com índices maiores do que 1.

Esta restrição a malhas 1-irregulares define um procedimento simples para o refinamento da malha: Antes que um elemento seja refinado, a sua vizinhança é averiguada e se algum vizinho sofreu menos subdivisões então ele será refinado primeiro.

Evidentemente, malhas irregulares surgem quando elementos retangulares (2D) ou hexaédricos (3D) constituem a malha. Quando se trata de elementos triangulares ou tetraédricos, a malha é naturalmente regular, como no caso de um malhador de Delaunay onde os nós são adicionados no baricentro ou no centro das arestas do elemento (Raizer, 1991), ou a regularidade pode ser mantida durante o refinamento através dos elementos de “Green” ou de transição (Demkowicz and Oden, 1988; Vanti, 1992).

6.3 Malhas Regulares : Continuidade para elementos hierárquicos

Como já foi comentado no capítulo 4, uma das vantagens importantes advindas do uso dos elementos hierárquicos é a facilidade com que se pode garantir a continuidade da aproximação entre elementos com ordens de interpolação diferentes. Um exemplo típico é mostrado na figura 6.2, onde o elemento Ω_{e1} de primeira ordem tem como vizinho um elemento de segunda ordem Ω_{e2} .

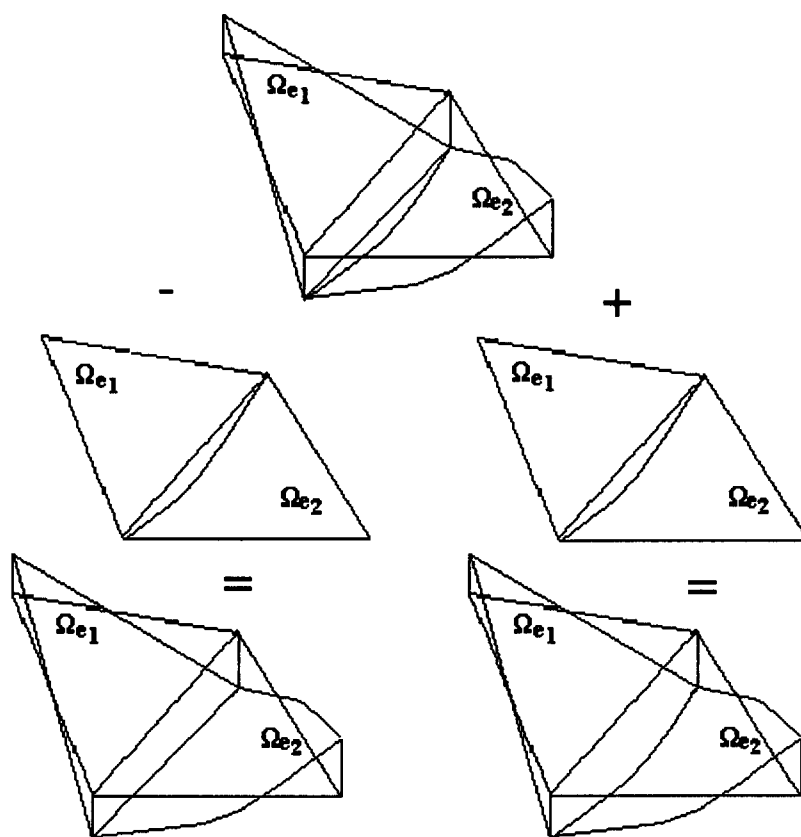


Figura 6.2 Continuidade entre elementos hierárquicos

Como pode ser visto na figura, duas possibilidades existem para o restabelecimento da continuidade. A primeira, consiste na adição de um grau de liberdade de segunda ordem ao lado comum do elemento Ω_{e1} . Esta é a regra do máximo (Demkowicz et al, 1989). Por outro lado, este mesmo grau de liberdade pode ser retirado do elemento Ω_{e2} , sendo esta a regra do mínimo e que é utilizada neste trabalho.

Na figura 6.5, o conjunto dos nós ativos do elemento Ω_e , considerando que exista apenas uma aresta não conforme é dado pelos nós 1, n , 3, 4, 5, m , 7 e 8.

A computação das matrizes elementares e dos vetores cargas modificados é realizada com uma transformação linear, a qual é aplicada sobre o vetor de funções de forma do elemento. Na integração do elemento Ω_e , na figura 6.5, A função de forma do nó 1 é igual a $N_1 + \frac{1}{2} N_2$, e a do nó n , por sua vez, é igual a $\frac{1}{2} N_2$. Esta transformação para um elemento unidimensional é ilustrada a figura 6.6.

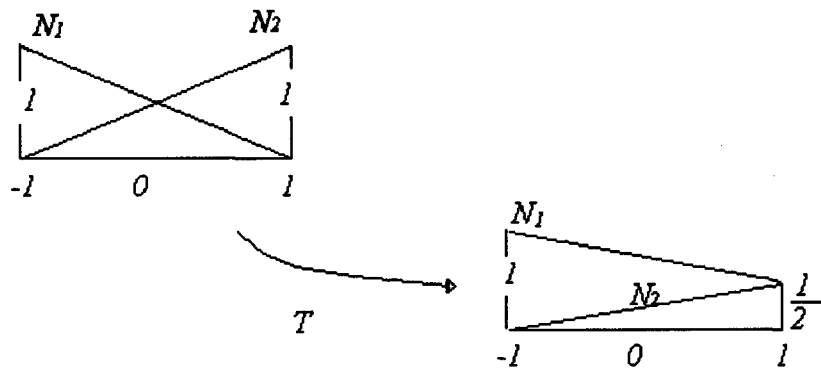


Figura 6.6 transformação das funções de forma para o elemento modificado

A matriz T para o elemento da figura 6.5 é:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/2 & & & & & & \\ & 1/2 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

E a equação (1.17) avaliada sobre o elemento torna-se:

$$B(T\vec{N}, T\vec{N}) = f(T\vec{N}) \quad (6.8)$$

Assim, pode ser notado que em elementos unidimensionais e bidimensionais, o procedimento é o mesmo. Deve-se entretanto implementar um método geral de transformação, que seja independente da posição local dos nós irregulares. Em outras palavras, um método de construção da matriz T para todos os casos possíveis. Para elementos tridimensionais, este é um problema muito mais complexo, pois é necessário agora fazer a modificação de forma a forçar a concordância sobre a face do elemento, e não apenas sobre uma aresta. A solução proposta neste trabalho utiliza as funções de forma do elemento “pai” para contornar esta dificuldade. Seja por exemplo, o elemento a esquerda da figura 6.6, que será subdividido em dois novos elementos, nos quais a interpolação deve concordar com a interpolação original no elemento pai. O elemento “filho” situado na metade esquerda terá então as funções como mostradas na figura. Fazendo-se N_1^p e N_2^p as funções de forma padrão relativas ao elemento “pai”, as funções de forma do elemento refinado serão :

$$N_1^* = N_1 + N_1^p(0)N_2 \quad (6.9)$$

$$N_2^* = N_2^p(0)N_2 \quad (6.10)$$

onde N_i^* são as funções modificadas. Em vista disso, as funções de forma lineares modificadas para os graus de liberdade ativos podem ser computadas como:

$$N_i^* = N_i + \sum_{j \in N^c} N_j^p(X_j)N_j \quad \forall i \in N^a \quad (6.11)$$

E, para as funções referentes aos graus impostos tem-se:

$$N_j^* = \sum_k N_j^p(X_k)N_k \quad \forall j, k \in N^c \quad (6.12)$$

onde $N_j^p(X_j)$ é a função do elemento “pai” de número local j , avaliada no ponto j . Por sua vez, a função de segunda ordem é modificada segundo o exemplo seguinte: Seja o elemento Ω_e da figura

$$\begin{aligned}
f(v_i) &= f(v_i) + \sum_{k \in S(i)} R_{ki} f(v_k), \\
B(v_i, v_j) &= B(v_i, v_j) + \sum_{k \in S(i)} R_{ki} B(v_k, v_j) + \sum_{k \in S(i)} R_{ji} B(v_i, v_k) + \\
&= \sum_{k \in S(i)} R_{ki} \sum_{k \in S(i)} R_{ji} B(v_k, v_l).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Na sequência será visto como estas modificações são efetuadas ao nível dos elementos. Considere-se um elemento Ω_e e $N^a(\Omega_e)$ e $N^r(\Omega_e)$ os conjuntos de graus de liberdade ativos e de graus de liberdade impostos, respectivamente, do elemento. Assim, o conjunto dos graus de liberdade associados ativos de Ω_e é definido como:

$$N^{aa} = N^a(\Omega_e) \cup \bigcup_{j \in N^r(\Omega_e)} I(j) \tag{6.6}$$

Um exemplo da geometria de um elemento e de seu conjunto de graus de liberdade ativos associados é ilustrado na figura 6.5 abaixo (Devloo, 1987):

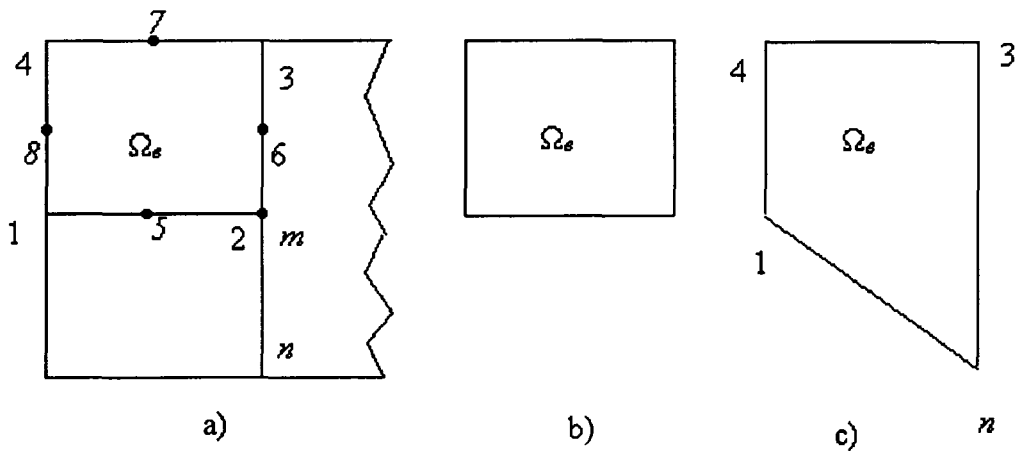


Figura 6.5 a) Malha 1-irregular; os nós 5,6,7 e 8 são nós hierárquicos de 2ª ordem, assim como o nó m relativo ao grande elemento não refinado; b) Geometria do elemento Ω_e ; c) Conjunto de graus de liberdade ativos associados, isto é 1,n,3,4,5,m,7,8.

Neste processo são gerados os nós irregulares. Finalmente, a estes nós corresponderá o conjunto dos graus de liberdade impostos combinatoriamente da malha, chamados assim porque não serão considerados no processo de integração do problema, mas são impostos como combinações lineares dos graus de liberdade correspondentes a nós regulares. Assim, são definidos os seguintes subconjuntos de graus de liberdade (Demkowicz et al, 1989):

- N^a é o conjuntos dos graus de liberdade ativos da malha, referentes aos nós regulares e

- N^c é o conjunto dos graus de liberdade impostos, referente aos nós irregulares.

Também é assumido que para cada grau de liberdade i imposto, existe um conjunto $I(i)$ de correspondentes graus de liberdade ativos tal que:

$$u_i = \sum_{j \in I(i)} R_{ij} u_j \quad (6.1)$$

A aproximação por elementos finitos pode ser escrita como:

$$u_h = \sum_{i \in N^a} u_i N^i + \sum_{j \in N^c} u_j N^j = \sum_{i \in N^a} u_i N^i + \sum_{j \in N^c} \sum_{k \in I(j)} R_{jk} u_k N^j \quad (6.2)$$

Introduzindo agora para todo $i \in N^a$ o conjunto

$$S(i) = \{j \in N^c / i \in I(j)\}, \quad (6.3)$$

u_h pode ser rescrito na forma

$$u_h = \sum_{i \in N^a} u_i N^i + \sum_{k \in N^c} \sum_{j \in S(k)} R_{jk} u_k N^j = \sum_{i \in N^a} u_i \left(N^i + \sum_{j \in S(i)} R_{ji} N^j \right). \quad (6.4)$$

Desta forma, o vetor carga e a matriz de rigidez podem ser escritos como:

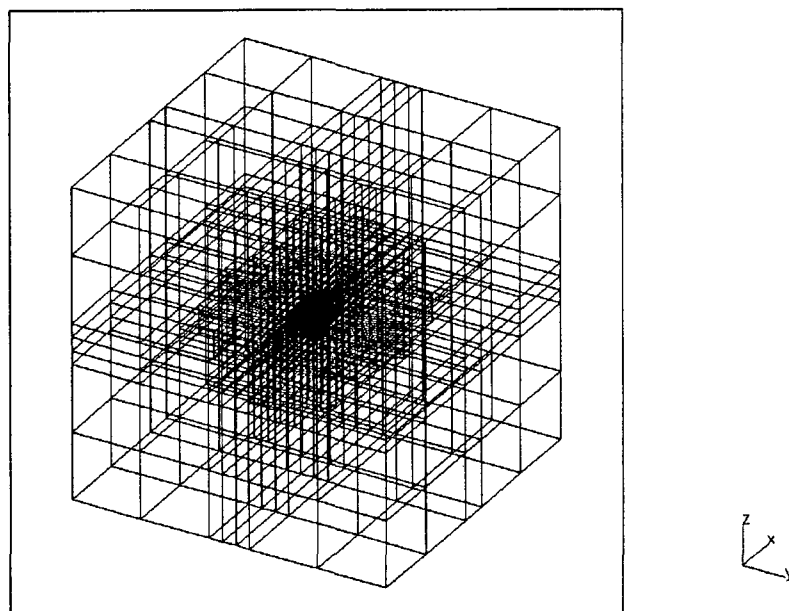


Figura 6.4 a. Malha hexaédrica após refinamento: vista em perspectiva.

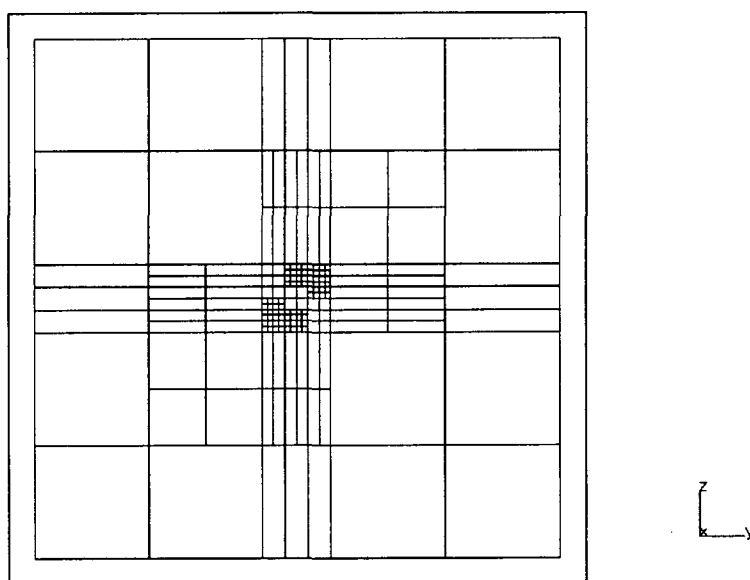


Figura 6.4 b. malha após refinamento: vista frontal.

Para cada elemento i a ser dividido, faça

Para cada face do elemento i faça

Se o número de vizinhos a face é igual a 1, então

cria o nó central da face

Para cada aresta da face recupera os vizinhos associados a aresta.

Se algum dos vizinhos de cada aresta estiver já subdividido, então

Associa o nó aos novos elementos

Se não

Cria o novo nó

Fim se

Se não

Associa os nós dos vizinhos sobre a face aos novos elementos

Fim se

Atualiza a tabela de vizinhos do elemento i e do(s) elemento(s) vizinho(s) à face

Fim para

Fim para

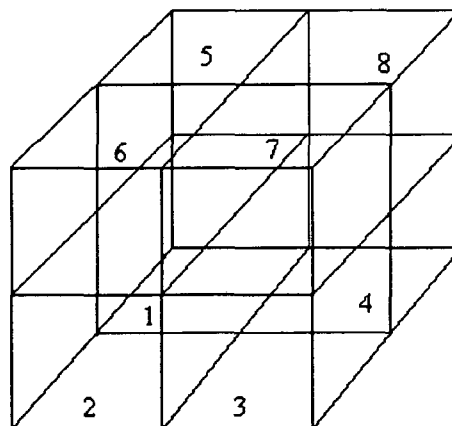


Figura 6.3 Numeração dos novos elementos criados no processo de refinamento.

6.4 Refinamento h , graus de liberdade impostos e restabelecimento da continuidade (elementos hexaédricos)

Assumindo-se que um determinado elemento deva ser refinado, ele será então subdividido em novos elementos. No refinamento com o método de Delaunay (Hermeline, 1982), com elementos triangulares ou tetraédricos, o procedimento consiste na inserção de novos nós ao baricentro de cada triângulo ou tetraedro. Estes elementos são então destruídos, e o método de Delaunay é aplicado para a reconstrução topológica dos novos elementos. Outra possibilidade é fazer a inserção dos novos nós sobre os centros das arestas, ao invés dos baricentros dos elementos.

Em malhas de elementos hexaédricos, neste trabalho cada elemento é dividido em 8 novos elementos, ou elementos “filhos”, onde o elemento “filho” numero 1 herdará o número do elemento que lhe deu origem, e sete novos números designarão os restantes novos elementos. Na figura 6.3 pode ser conferida a numeração dos elementos resultantes do refinamento de um elemento “pai”. O algoritmo de refinamento desenvolvido é baseado na vizinhança dos elementos. Se um elemento possuir apenas um vizinho a uma determinada face, então ao ser dividido um novo nó será criado sobre a face. Caso contrário, existirão 4 elementos vizinhos a esta face, e os nós já existentes serão recuperados para os novos elementos gerados. Para a subdivisão das arestas, todos os elementos associados a cada aresta devem ser analisados. O algoritmo é o seguinte (Um exemplo de malha refinada com este algoritmo pode ser visto na figura 6.4):

6.5 a faces não conforme de um elemento hexaédrico. Então, a função modificada local é dada por:

$$N_6^* = -N_2 + \frac{1}{4}N_6 + \frac{1}{2}(-N_1 + \frac{1}{4}N_8) \quad (6.13)$$

Neste exemplo considera-se toda a face como não conforme.

Logicamente, a numeração dos nós do elemento “pai” e dos elementos “filhos” são correspondentes, de forma que se o nó j no elemento filho é irregular, o nó j no elemento “pai” será o nó ativo associado.

6.5 Estrutura de dados

Para a implementação da versão $h-p$ a estrutura de dados padrão do método dos elementos finitos clássico, como tabela de conexões de nós aos elementos, coordenadas destes, etc., deve ser estendida para que um número muito maior de informações necessárias possam ser guardadas e manuseadas pelo programa. Abaixo, são apresentadas resumidamente as novas tabelas utilizadas neste trabalho:

Para um determinado elemento, são armazenados:

a) A lista de elementos vizinhos. Como cada face de um hexaedro pode conter 1 ou 4 vizinhos, eles são armazenados na tabela seguinte:

IVIZ (4,6,NEL)

onde NEL é o numero de elementos da malha.

b) O elemento “pai” é armazenado na lista

PATER (NEL)

Deve ser sublinhado que apenas o elemento “pai” de cada elemento da malha é armazenado nesta lista. Não se utiliza neste trabalho árvores completas de famílias de elementos.

c) A ordem de interpolação sobre o elemento é armazenada explicitamente na lista

IOEL(NEL)

O número de nós de um elemento é calculado como $12(\text{IOEL}(i)-1)+8$

d) O grau de refinamento de um elemento é armazenado em

$\text{INREF}(\text{NEL})$

onde um elemento na malha inicial possui $\text{INREF} = 0$.

e) A contribuição do erro estimada do elemento

$\text{ELE_ER}(\text{NEL})$

Para os elementos “pais”, tem-se ainda:

f) A tabela de conectividade dos nós dos elementos “pais”

$\text{ICPATER}(8, \text{NEP})$

onde NEP é o número de elementos “pais”.

g) A ordem de interpolação sobre o elemento “pai”

$\text{IOPATER}(\text{NEL})$

Além disso, algumas tabelas (Por exemplo aquelas dependendo de NEL) têm sua dimensão modificada ao longo do processo adaptativo. Por isto utilizou-se aqui o conceito de memória “pseudo-dinâmica” o qual permite a armazenagem de tabelas de dimensão variável durante o processamento (Mesquita, 1990).

Também foi implementada, no programa Flux3d, uma estrutura de dados apropriada para processos adaptativos a qual foi desenvolvida segundo a filosofia de orientação para objetos. Com esta estrutura, diferentes procedimentos adaptativos, com diferentes estimadores e versões h e p podem ser manuseados e combinados de forma simples durante a análise. Esta estrutura é organizada como segue. No topo existe a entidade ADAPTATIVIDADE, a qual possui como atributos o estimador de erros na entidade ESTIMADOR e a versão adaptativa na entidade REFINADOR escolhidos pelo analista, assim como os limites de erros que controlarão o processo adaptativo. Na entidade ESTIMADOR podem ser definidos vários algoritmos de estimação de erros, assim como em REFINADOR são definidas as versões h e p . Deste modo, pode-se agora

definir a qualquer momento como será estimado o erro em um dado problema, e como a malha será refinada. Pode-se mesmo definir métodos diferentes para diferentes regiões do mesmo problema.

6.6 Conclusão

Neste capítulo foram descritas as implementações de algoritmos adaptativos no programa Flux3d (desenvolvido pelo Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble) com elementos triangulares e tetraédricos usando-se o algoritmo de Delaunay, e no programa EFCAD3D, desenvolvido no Grupo de Concepção de Dispositivos Eletromagnéticos, da Universidade Federal de Santa Catarina. No próximo capítulo serão apresentados resultados numéricos obtidos com estes programas.

Capítulo 7

Resultados Numéricos

7.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados resultados obtidos com a utilização de malhas adaptativas, versão *h-p*. Em dois exemplos, dois casos magnetostáticos bidimensionais clássicos são explorados, com malhas triangulares geradas e refinadas com o algoritmo de Delaunay. O terceiro exemplo é uma aplicação bi e tridimensional do sistema *h-p* utilizando-se malhas triangulares, tetraédricas e hexaédricas.

7.2 Problema com domínio retangular e solução fortemente regular

Neste exemplo, o domínio é formado por uma região quadrada, na qual é imposta uma densidade superficial de corrente dada por

$$\vec{J} = -8\pi^2 \sin 2\pi x^2 \sin 2\pi y^2$$

cuja solução analítica é conhecida (Nayrolles et al, 1991). Também é imposta condição de Dirichlet nula no contorno completo do domínio, o qual é representado na figura 7.1, abaixo. Este domínio foi discretizado uniformemente em cinquenta elementos triangulares lineares.

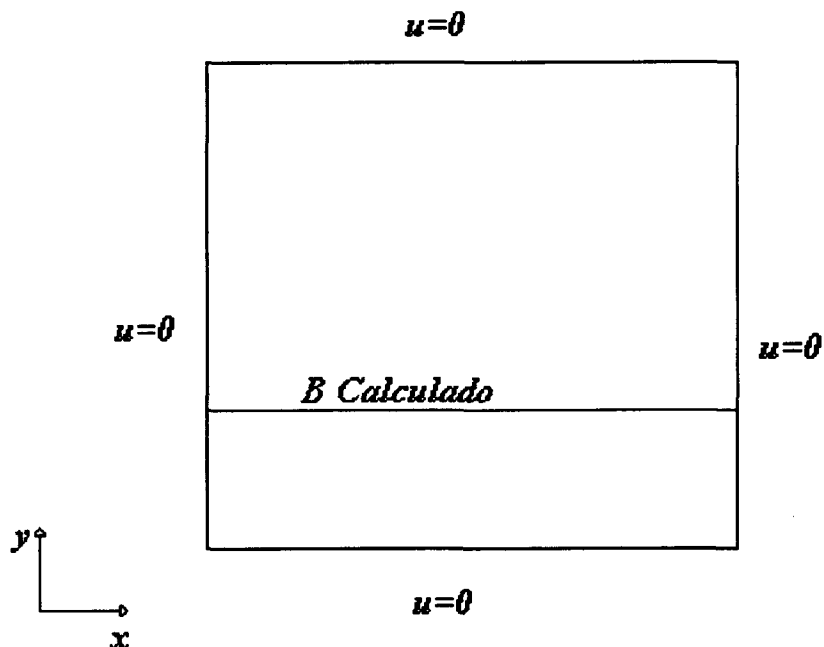


Figura 7.1 Domínio para o exemplo 1.

Neste exemplo, as curvas de indução são calculadas sobre uma linha horizontal como mostra a figura. Graças a regularidade da corrente imposta, a solução, é por sua vez, bastante regular, e segundo as conclusões do capítulo 3, a versão adaptativa p é apropriada para este caso. Assim, três passos adaptativos foram empregados utilizando-se o método dos resíduos aplicados aos subdomínios, tendo como resultado, a elevação quase simultânea da ordem de interpolação dos elementos em cada passo, segundo o que era já esperado.

As curvas de indução obtidas durante o processo iterativos são mostradas na figura 7.2. Na figura 7.2 a, tem-se as curvas para elementos lineares. Nas figuras 7.2 b e c, são apresentadas as induções calculadas no segundo e terceiro passo respectivamente, com elementos de segunda e terceira ordem. O algoritmo criou uma seqüência de p refinamentos em direção a um erro mínimo.

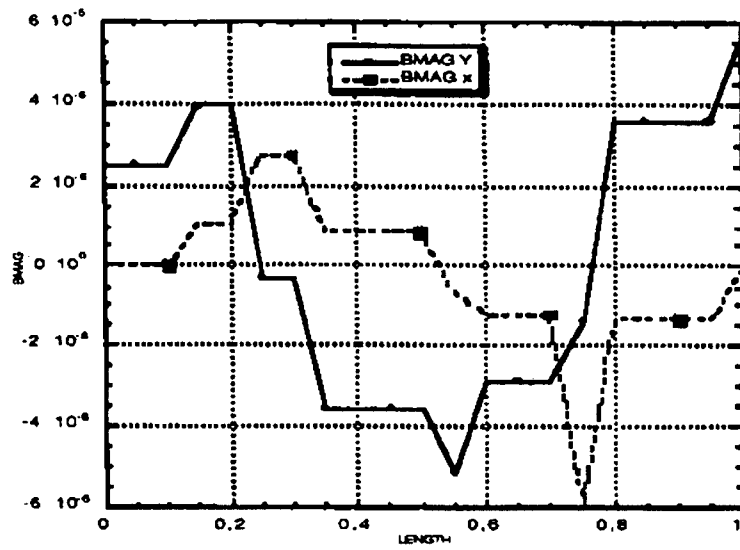


Figura 7.2 a . Indução magnética para o exemplo 1 (36 nós)

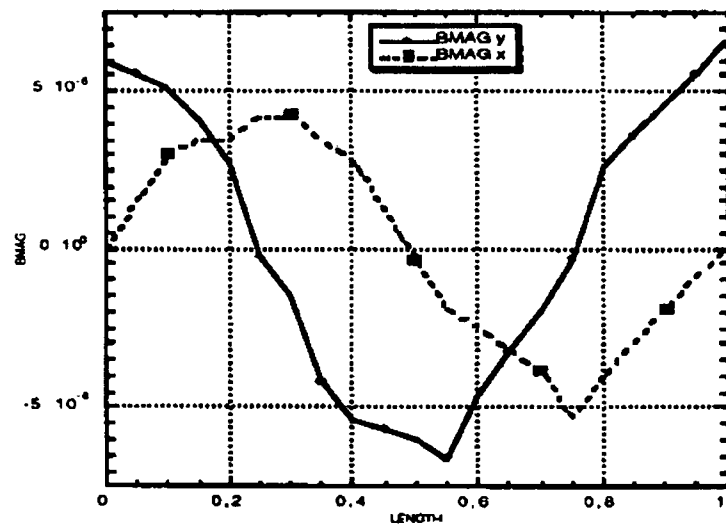


Figura 7.2 b . Indução magnética para o exemplo 1 (119 nós)

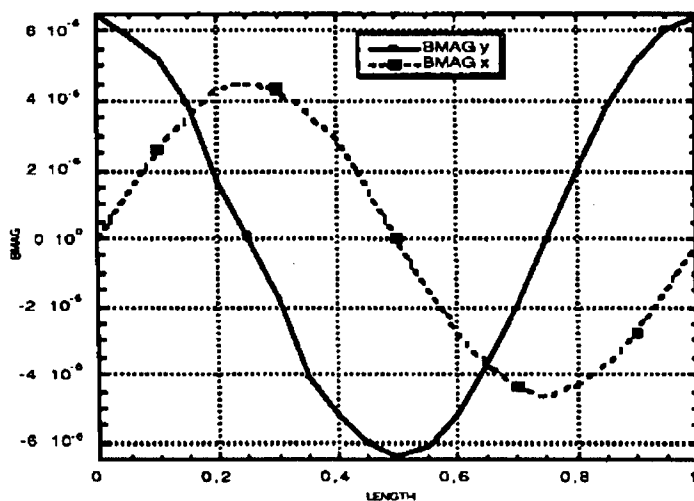


Figura 7.2 c . Indução magnética para o exemplo 1 (247 nós)

7.3 O Problema “L-shaped”

Este problema consiste em um domínio em forma de L, o qual apresenta uma forte singularidade, a qual pode ser vista na figura 7.3. Com a imposição das condições de contorno indicadas, a solução apresenta um comportamento singular com gradientes muito fortes no ângulo sombreado, e por outro lado, assume um comportamento bastante regular no restante do domínio.

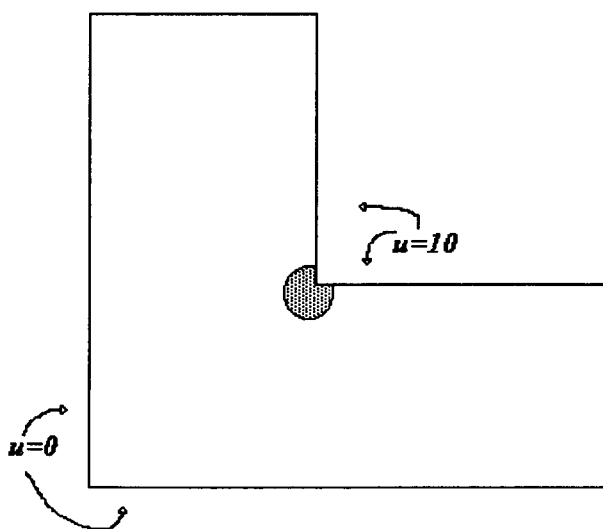


Figura 7.3 O Problema “L-Shaped”. A vizinhança do ponto singular é sombreada.

Neste caso, para que a singularidade seja corretamente modelada, é necessário que a região onde ela se encontra, neste caso o ângulo sombreado na figura, seja fortemente refinada o que pode ser realizado com elementos de baixa ordem. Este exemplo foi tratado com as versões h e p uniformes e a versão h - p . Com a versão h uniforme, ocorre um rápido decaimento inicial do erro estimado, mas este decaimento torna-se lento quando o número de graus de liberdade é grande, porque à medida em que a singularidade é melhor modelada, um número excessivo de elementos é adicionado na região onde a solução é regular, ocasionando neste região, uma baixa taxa de convergência. Na versão p , a malha conta com 216 elementos, e suas ordens de interpolação são elevadas uniformemente. Também neste caso tem-se uma diminuição da taxa de convergência, após um valor alto no início, causada pelo alto erro na região singular que é modelada com elementos muito grandes.

Finalmente, com a versão h - p , a malha sofre inicialmente um forte refinamento no ponto singular, seguido então pela elevação não uniforme da ordem de interpolação dos elementos. Na malha final, mostrada na figura 7.4, os elementos próximos a região singular são de primeira e segunda ordem, enquanto que no restante do domínio, tem-se elementos de segunda e terceira ordem. De forma geral, imaginando-se um círculo com centro na singularidade, a ordem de interpolação cresce radialmente de um a três a partir do centro. Como resultado, a taxa de convergência mantém-se em um valor elevado durante todo o processo iterativo, apresentando um erro final significativamente baixo em relação as versões p e h uniformes. Na figura 7.5 são apresentadas as curvas representando as taxas de convergência das três versões adaptativas.

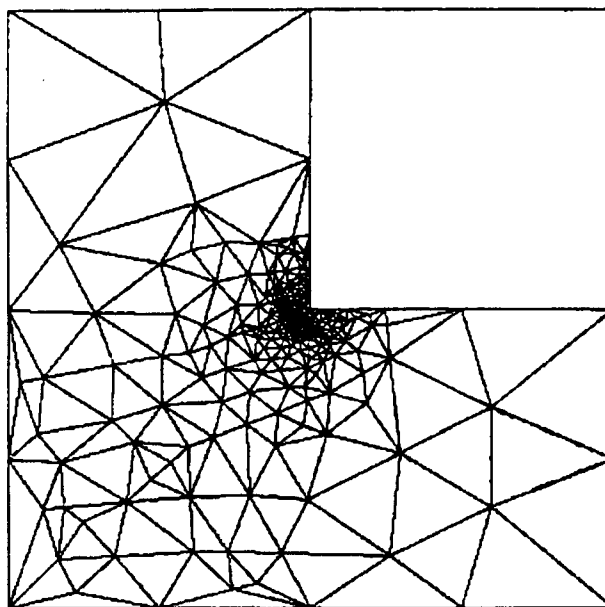


Figura 7.4 Malha final obtida com a versão adaptativa h - p

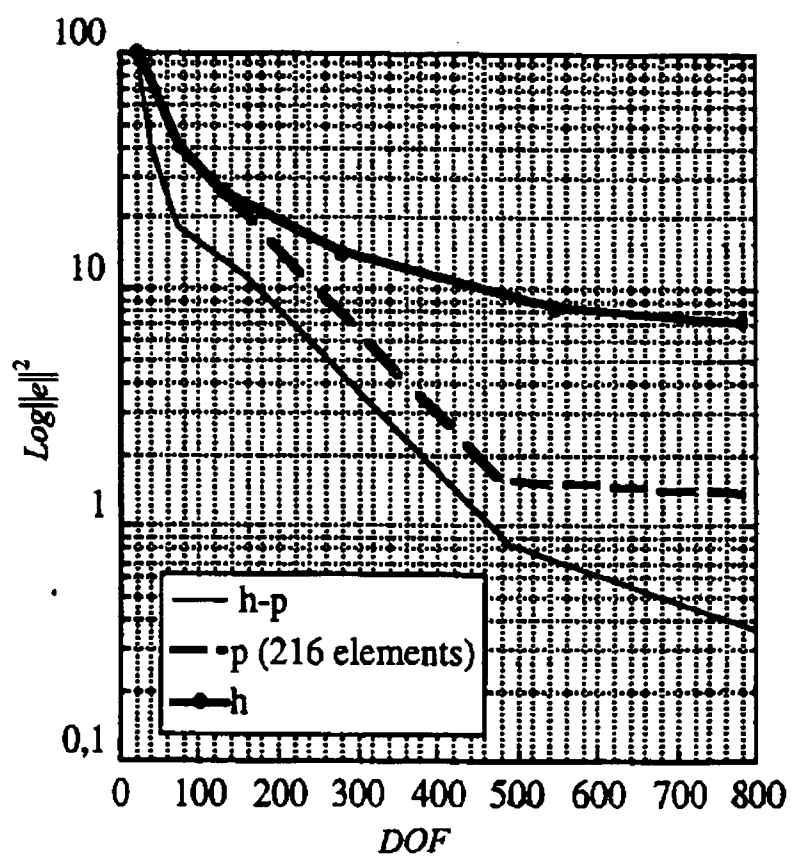


Figura 7.5 Curvas de convergência para o problema “L-Shaped”.

7.4 O problema dos ímãs permanentes

A geometria analisada neste terceiro exemplo é composta de dois ímãs permanentes paralelos, suspensos no ar, com imantação oposta e igual a 1 Tesla. Este exemplo foi modelado em 2D, com elementos triangulares e em 3D com elementos tetraédricos e hexaédricos. O primeiro e segundo caso foram analisados com o programa Flux3D, com o estimador do cálculo resíduos no subdomínio, e o terceiro com o programa EFCAD3D e o estimador do cálculo de resíduo sobre o elemento. Em todos os casos a condição $u=0$ é imposta em todo o contorno exterior.

Na figura 7.6 pode ser vista a malha final para o modelo 2D. Nesta malha, estão presentes elementos de primeira, segunda e terceira ordem. Os elementos de primeira ordem existem quase que exclusivamente nos cantos dos ímãs. A curva de potencial calculada entre os ímãs é mostrada na figura 7.7. Este caso é calculado com a formulação potencial vetor.

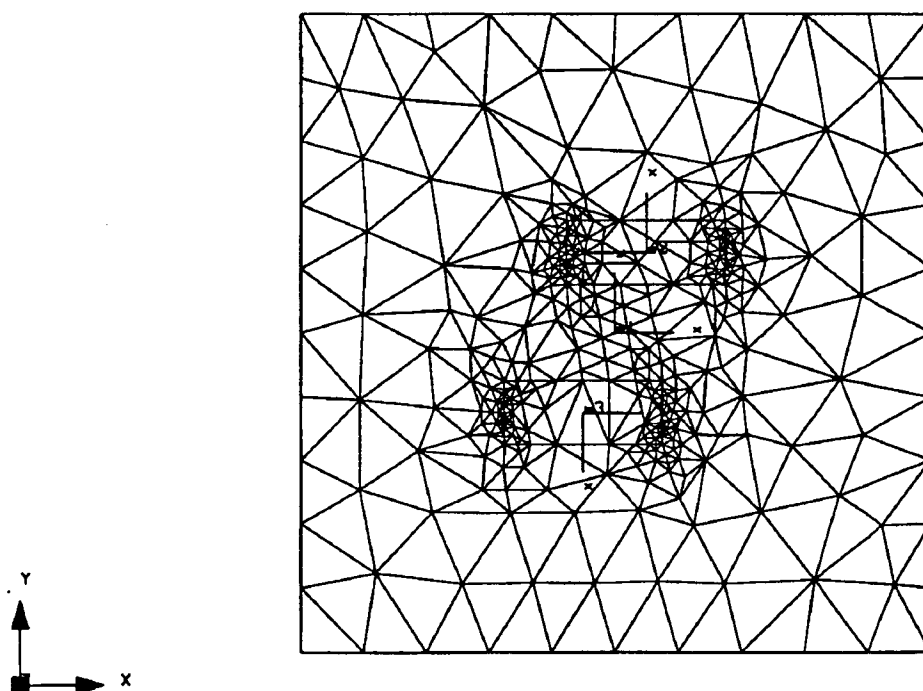


Figura 7.6 Malha final para o problema dos ímãs paralelos em 2D

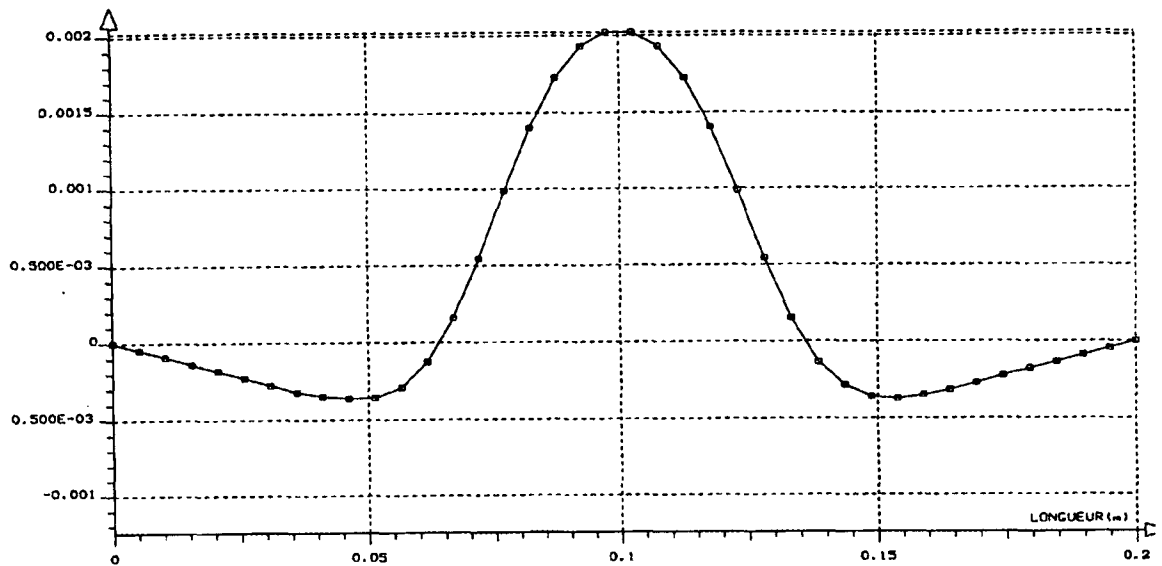


Figura 7.7 Curva de potencial vetor magnético entre os ímãs para o modelo 2D.

Para o modelo 3D, a primeira malha é mostrada na figura 7.8 com 20218 nós. Neste modelo, os elementos nos ímãs possuem interpolação de segunda ordem, enquanto que no restante da malha os elementos são de terceira ordem. A curva de potencial é mostrada na figura 7.9. Note que neste caso a geometria está levemente modificada em relação aos outros dois modelos:

Finalmente, o problema é modelado em elementos hexaédricos, onde inicialmente a malha é discretizada em 245 elementos trilineares, com 384 nós. A Malha final com 427 elementos de segunda ordem e 2592 nós é apresentada na figura 7.10. Finalmente, nas figuras 7.11 e 7.12 podem ser apreciadas a solução do problema para as duas malhas, calculadas em uma reta $x=cte$, entre os ímãs.

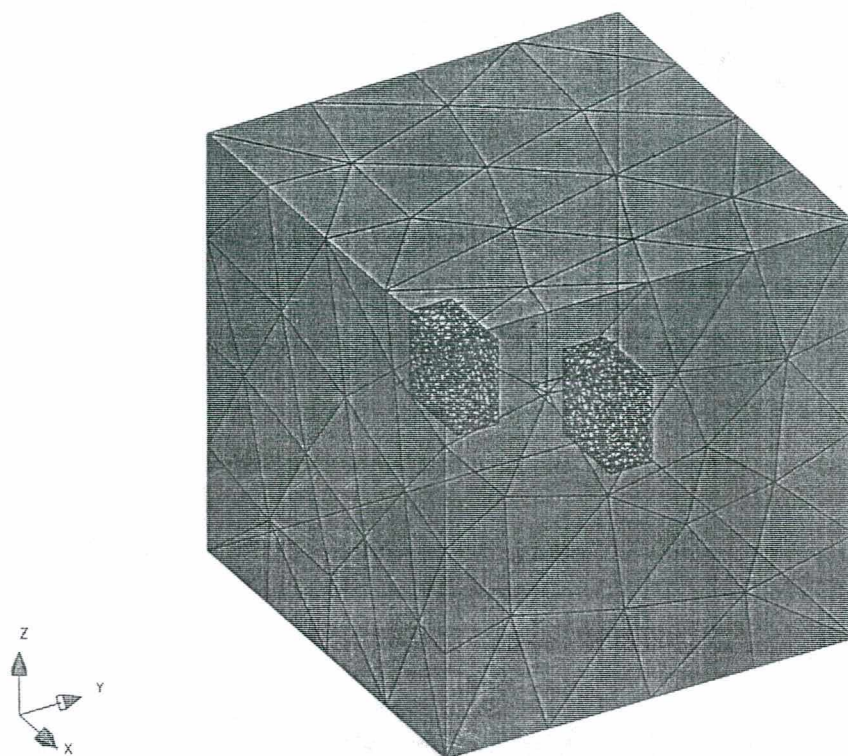


Figura 7.8 Malha final para o modelo 3D com tetraedros

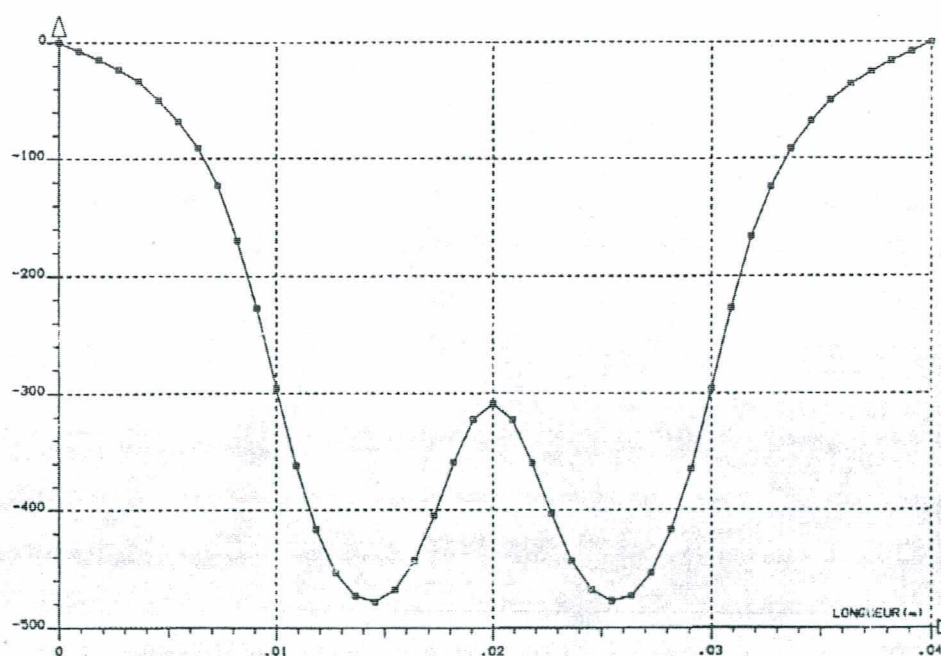


Figura 7.9 Curva de potencial escalar para o modelo 3D com elementos tetraédricos

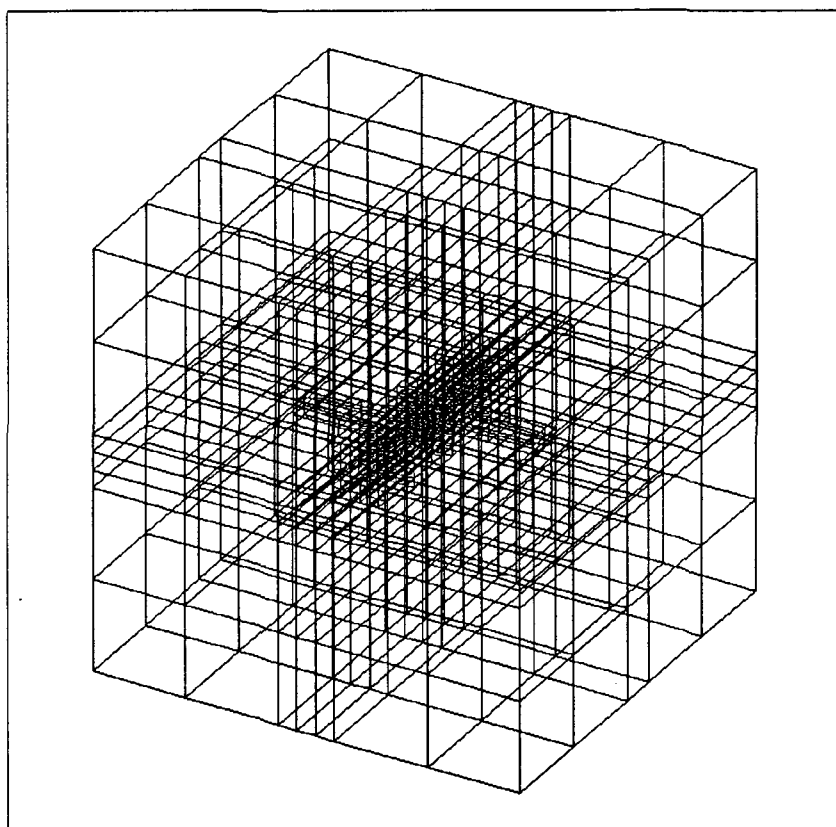


Figura 7.10 Malha final para o problema dos ímãs permanentes (427 elementos, 684 nós)

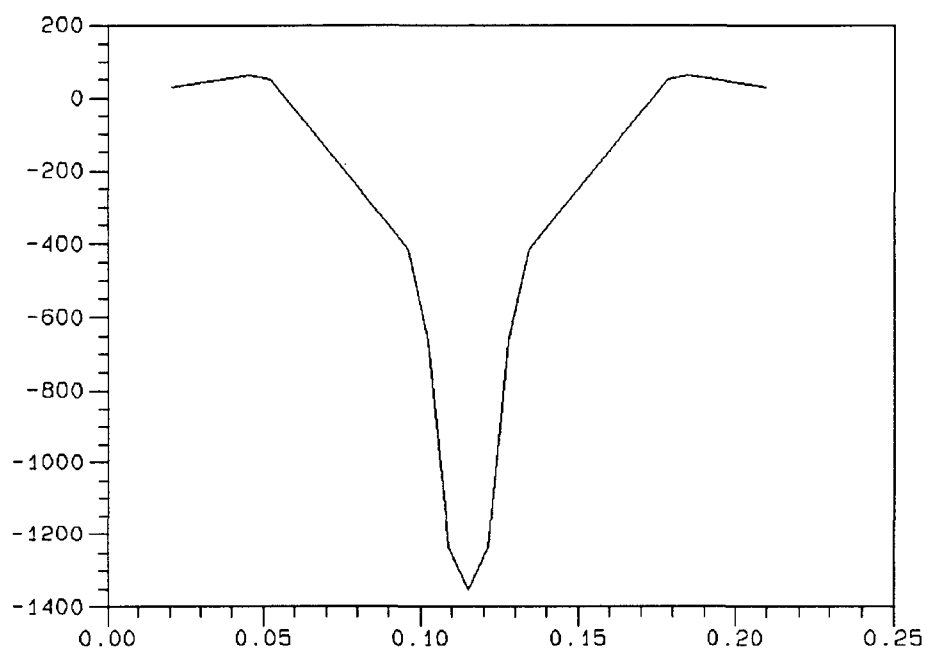
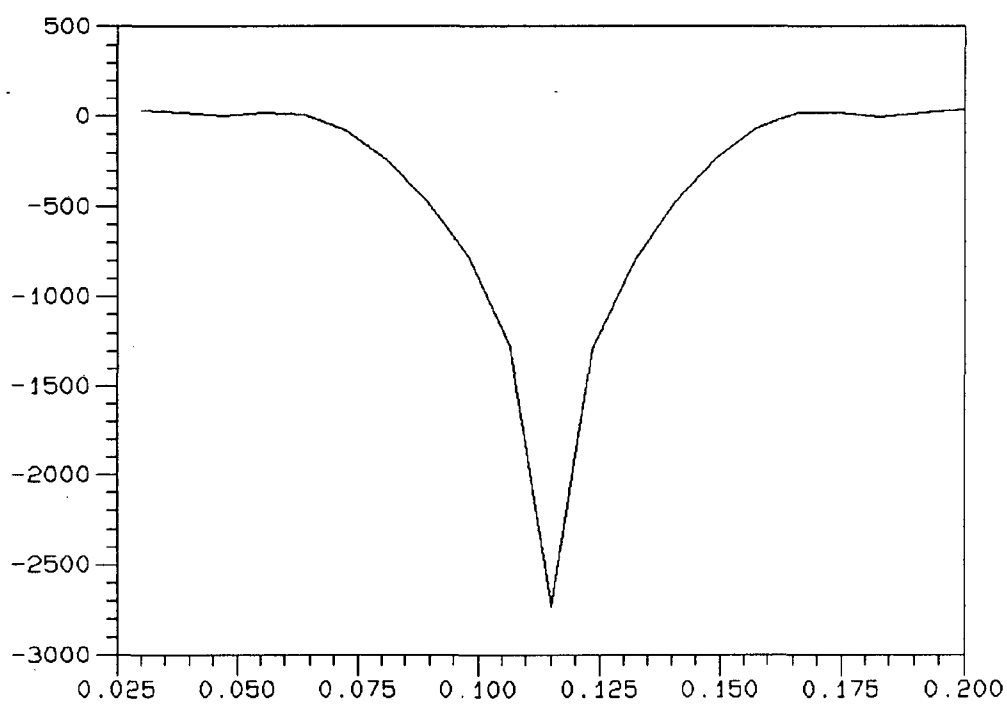


Figura 7.11 Potencial escalar magnético entre os ímãs calculados com a malha inicial.



Figur7.12 Curva de potencial escalar magnético para o problema dos ímãs paralelos, malha final.

7.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados alguns resultados obtidos com os algoritmos h - p apresentados. Em todos eles foi aplicada a metodologia proposta no capítulo 3 baseada no conceito de malhas ótimas, ou seja, atacando-se inicialmente os pontos singulares do domínio, quando eles existem, através de um forte refinamento da malha, e elevando-se após a ordem das funções nas regiões onde o problema é regular. Os resultados atingidos têm confirmado a expectativa de se obter desta forma a melhor aproximação para um número aceitável de graus de liberdade.

Conclusões Finais

Apresentou-se neste trabalho uma metodologia para refinamento adaptativo de malhas de elementos finitos na qual o grau de regularidade da solução deve ser considerado. Esta metodologia é baseada na implementação da versão adaptativa h - p .

Para realização deste objetivo, foi necessária a implementação das versões h e p separadamente, para que depois pudessem ser combinadas com um estimador de erros apropriado.

Assim, a primeira etapa do trabalho consistiu no estudo e implementação da família dos elementos hierárquicos, os quais se mostraram especialmente adequados para refinamento adaptativo de malhas segundo a versão p . Trabalhou-se inicialmente com elementos triangulares e tetraédricos, no programa Flux3d, e depois com elementos hexaédricos no programa EFCAD3D. Além das facilidades advindas com a utilização destes elementos com a versão p , principalmente do ponto de vista da continuidade da aproximação entre elementos de diferentes ordens de interpolação, pode-se também constatar o melhor condicionamento das matrizes geradas com estes elementos. A comparação entre elementos de segunda ordem hierárquicos e lagrangeanos mostrou que o número de iterações do método ICCG é aproximadamente 30% menor quando elementos hierárquicos são utilizados. Uma comparação direta do condicionamento foi então realizada mostrando que o número de condição evolui mais lentamente para o elementos hierárquicos com a diminuição da dimensão dos elementos.

Duas técnicas foram utilizadas para o refinamento com a versão h . A primeira consiste na inserção de novos nós nos elementos que devem ser refinados, e então na aplicação do algoritmo de Delaunay para a reconstrução da malha. Para malhas hexaédricas, um algoritmo “inteligente” foi desenvolvido baseado nos dados topológicos dos elementos. Uma vantagem da utilização de

malhas de elementos triangulares e tetraédricos vem do fato que não são gerados nós irregulares com estes elementos. A ocorrência destes nós é entretanto inevitável no refinamento de elementos hexaédricos, e assim um método de tratamento de nós irregulares foi desenvolvido para elementos de primeira e segunda ordem.

Neste trabalho optou-se pelo estimador de erros baseado no cálculo local do residuo total da equação diferencial, escolha esta devida a uma série de fatores, como:

- Os resultados obtidos mostram que ele fornece uma eficiente indicação local do erro, assim como uma estimação global do erro na malha.
- Possui uma sólida fundamentação matemática.
- O estimador não necessita de nenhum tipo de normalização em relação aos meios magnéticos.
- Uma boa análise de erro é obtida em altas ordens de interpolação assim como em elementos lineares.

Finalmente, observa-se que a metodologia proposta é apropriada para o controle do erro de discretização do método dos elementos finitos. Os resultados foram escolhidos de forma a manter como ponto de referência a regularidade de solução exata, e pôde ser visto que quando singularidades são presentes no domínio de calculo a malha deve ser localmente bastante refinada, evitando assim que o erro “contamine” o restante da malha. Apenas a versão $h-p$ é capaz de controlar o erro para um problema geral.

Como sugestão para continuidade deste trabalho, pode-se citar:

- Verificação exaustiva da confiabilidade do estimador de erros implementado, e um estudo comparativo entre o problema local baseado no elemento e no subdomínio.

Apesar de o estimador “a posteriori” de erros ser uma ferramenta necessária no controle de um processo adaptativo, existem trabalhos (Bastos, 1996) que propõem a geração “inteligente” de malhas, nas quais os pontos singulares seriam inicialmente modelados com um adequado grau de refinamento. Pode-se combinar um sistema deste tipo com a versão $h-p$, de forma que poucos

refinamentos com a versão h sejam necessários, abreviando consideravelmente o processo adaptativo. Os elementos hierárquicos tornam a implementação de um sistema deste tipo atrativamente simples.

- Apesar de se conceber métodos de tratamento de nós não conformes em ordens arbitrárias de interpolação, a dificuldade em implementá-los leva a conclusão que malhas com simplexes (triângulos e tetraedros) são mais apropriadas para a versão p dos elementos finitos. Também existe um recente esforço de pesquisa em métodos ditos sem malhas, onde apenas nuvens de nós são consideradas. Estes métodos teriam a evidente vantagem, entre outras, de não necessitar de complexos algoritmos de geração de malhas.

Referências Bibliográficas

AKOUN, G.; YONNET, J-P., 3D analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets, vol. mag-20, nº 5, 1962-1964, september, 1984.

BABUSKA, I.; AZIZ, A.K., On the angle condition in the finite element method, SIAM journal numer. anal., vol. 13, nº 2, 214-226, april, 1976-a.

BABUSKA, I., Quality assesment and control of finite element solutions, technical note, 1976.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W.C., A-posteriori error estimates for the finite element method, int. j. numer. methods eng., vol. 12, 1597-1615, 1978.

BABUSKA, I.; SZABO, B., On the rates of convergence of the finite element method, int. j. numer. methods eng., vol. 18, 323-241, 1982.

BABUSKA, I., Feedback, adaptivity and a posteriori estimates in finite elements: Aims, theory, and experience, in Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, John Wiley & Sons, 1986.

BABUSKA I; SURI, M. , The p- version of the finite element method for constraint boundary conditions, mathematics of computation, 1-13, 1988.

BABUSKA I.; GUO, B.Q. , The h-p version of the finite element method for problems with nonhomogeneous essential boundary conditions, computer meth. in applied mechanics and engineering, 1-28, 1989(a).

BABUSKA, I.; GRIEBEL, M.; PITKARANTA, J.; The problem of selecting the shape functions for a p-type finite element, Int. J. Num. Methods Eng., Vol 28, pp. 1891-1908, 1989(b).

BABUSKA I.; SURI M. , The p- and h-p versions of the finite element method, an overview, computer meth. in applied mechanics and engineering, 5-26, 1990.

BABUSKA,I. ; GUO,B.Q. , The h,p,and h-p version of the finite element method; basis theory and applications, advances in engineering software, 159-174, 1992.

BABUSKA,I. ; STROUBOLIS, T.; UPADHYAY,C.S. , A model study of the quality of a-posteriori estimators for linear elliptic problems, technical note, 1993-a.

BABUSKA,I. ; STROUBOLIS, T.; UPADHYAY,C.S.; GANGARAJ, S.K.; COPPS,K. , Validation of a-posteriori error estimators by numerical approach, technical note, 1993-b.

BANK, R.E.; WEISER, A. , Some a posteriori error estimators for elliptical partial differential equations, mathematical of computation, 44, 283-301, 1985.

BASTOS, J. P. A. , Expert meshing : An alternative technique for auto-adaptive methods, Artigo aceito para ser publicado no IEEE Trans. On Mag, March, 1997.

BECKER, E.B.; CAREY, G.F.; ODEN, J.T., Finite elements: an introduction, Vol I in the Texas Finite Element Series, Englewood Cliffs (New Jersey - USA), Prentice Hall,1981.

BOSSAVIT, A., On the condition "h normal at the wall" in magnetic fields problems, intern. j. num. methods eng., Vol. 24, 1541-1550, 1987.

BOSSAVIT, A., Introduction aux formulations variationelles in eletromagnetisme, Paris, Publicação interna da Ecole Supérieure d'Eletricité, dezembro, 1988.

CAREY, G.F.; HUMPHREY, D.L. Mesh refinement and iterative solution methods for finite element computations, , int. j. numer. Methods eng., Vol 17, pp. 1717-1734, 1981.

CENDES, Z.J.; SHENTON, D.; SHAHNASSER, H., Magnetic field computation using Delaunay triangulation and complementary finite element methods, IEEE Trans. on Magn., Vol. MAG-19, no 6, 2551-2554, november,1983.

CENDES, Z.J.; SHENTON, D.N., Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic fields, IEEE Trans. on Magn., Vol. MAG-21, nº 5,1811-1816, september, 1985.

CIARLET, P.H., The finite element method for elliptic problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

COULOMB, J-L., 2D and 3D mesh generation. Experiment with the Delaunay's tessellation, journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble - France, october, 1987.

DEMKOWICZ, L.; ODEN, J.T., A review of local mesh refinement techniques and corresponding data structures in h- type adaptive finite element methods, the Texas Institute for Computational mechanics, the University of texas at Austin, 1988.

DEMKOWICZ, L.; ODEN, J.T.; RACHOWICZ, W.; HARDY, O. , toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part1. constrained approximation and data structure, computer meth. in applied mechanics and engineering, 77, 79-112, 1989.

DEVLOO, P.R.B., An h-p adaptive finite element method for steady compressible flow, Thesis , University of Texas at Austin, August, 1987.

DHAT, G.; TOUZOT, G., Une présentation de la méthode des éléments finis, deuxième édition, Maloine S.A . Editeur, Paris, 1984.

DUARTE, C.A.M., Estudo da versão p do método dos elementos finitos para problemas de elasticidade e de potencial, Dissertação de mestrado, UFSC, 1991.

FERNANDES, P.; GIRDINO, P.; MOLFINO, P.; MOLINARI, G.; REPETTO, M., A comparison of adaptive strategies for mesh refinement based on "a posteriori" local error estimation procedures, IEEE Trans. on Magn., Vol 26, nº 2, 795-798, march, 1990.

GAGO, J.P KELLY, D.W.; ZIENKIEWICZ, O.C.; BABUSKA, I., A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II - adaptive mesh refinement, intern. j. num. methods eng., Vol. 19, 1621-1656, 1983.

GIANNACOPOULOS, D.; McFEE, S., Toward optimal h-p adaption near singularities in finite element eletromagmetics, compumag, Miami, Florida, USA, 1993.

HAHN, S-Y., A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh generation, IEEE Trans. on Mag., Vol. 24, nº 1, 315-317, january, 1988.

HERMELINE, F., Automatic triangulation of a polyedron in dimension n , RAIRO Numerical anl., Vol 16, nº 3, pp. 211-242, 1982.

HOOLE, S.R.H.; YOGANATHAN, S.; JAYAKUMARAN, S., Implementing the smoothness criterion in adaptive meshes, IEEE Trans. on Magn., Vol. MAG-22, nº 5, 808-810, september, 1986.

HOOLE, S.R.H.; JAYAKUMARAN, S.; HOOLE, N.R.G., Flux density and energy perturbations in adaptive finite element mesh generation, IEEE Trans. on Magn. Vol.24, nº 1, 322-325, january, 1988.

HOOLE, S.R.H., Computer - aided analysis and design of eletromagnetic devices, New York, Elsevier Science Publishing, 1989.

IDA, N.& BASTOS, J.P.A. Eletromagnetics and calculation of fields, Springer-Verlag, New York, 1992.

JACKSON, J.D., Eletrodinâmica Clássica, Editora Guanabara Dois, segunda edição, 1983.

KOLMOGOROV, A . N.; FOMIN, S.V., Elements of the theory of functions and functional analysis, GRAYLOCK PRESS, Rochester, N.Y., 1957.

KELLY, D.W.; GAGO, J.P.; ZIENKIEWICZ, O.C.; BABUSKA, I., A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I - error analysis, intern. j. num. methods eng., Vol. 19, 1593-1619, 1983.

KELLY, D.W.; The self - equilibration of residuals and complementary a posteriory error estimates in the finite element method, intern. j. num. methods eng., Vol. 20, 1491-1506, 1984.

KRAUS, J.D.& CARVER, K.P., Eletromagnetismo, Editora Guanabara Dois, segunda edição, 1978.

LOGEAIS, E.; YONNET, J-P.; COULOMB, J-L.; MEUNIER, G.; GITOSUSASTRO, S., comparison between 3D, 2D finite elements methods and analytical calculation for eletromagnetical problems, IEEE Trans. on Mag., Vol. 24, nº 1, 66-69, january, 1988.

LYRA, P.R.M., Uma Estratégia de Refinamento Auto - Adaptativo versão h do Método dos Elementos Finitos Aplicada a Problemas Bi-Dimensionais Regidos Pela Equação de Campo, dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, setembro, 1988.

MANDEL, J., Iterative solvers by substructuring for the p-version finite element method, computer meth. in applied mechanics and engineering, 117-128, 1990.

MEDEIROS, L.H.A., Elementos infinitos mapeados e elementos virtuais no cálculo de campos eletromagnéticos em problemas de fronteiras abertas pelo método dos elementos finitos.

MESQUITA, R.C., Cálculo de Campos Eletromagnéticos Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos: Magnetostática, Quase - Estática e Aquecimento indutivo, Tese de Doutorado, UFSC, 1990.

NAYROLLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P.; La methode des élément diffus, Compte rendu de l'Academie des Sciences, Paris, 1991.

ODEN & REDDY, An introduction to the mathematical theory of finite elements, John Wiley & Sons, New York, 1976.

ODEN, J.T.; DEMKOWICZ, L.; RACHOWICZ, W.; WESTERMANN, T.A., Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part.2. a posteriori error estimation, computer meth. in applied mechanics and engineering, 77, 113-180, 1989.

ODEN, J.T., Optimal h-p finite element methods, computer meth. in applied mechanics and engineering, 309-331, 1994.

PENMAN, J.; FRASER, J.R.; Complementary and dual energy finite element principles in magnetostatics, IEEE Trans. on Magn., Vol. MAG-18, 319-324, March, 1982.

PENMAN, J.; FRASER, J.R.; Dual and complementary energy methods in eletromagnetism, IEEE Trans. on Mag., Vol. MAG-19, nº 6, 2311-2316, november, 1983.

PENMAN, J.; GRIEVE, M.D., An approach to self - adaptive mesh generator, IEEE Trans. on Mag., Vol. MAG-21, nº 6, 2567-2570, november, 1985.

RACHOWICZ, W.; ODEN, J.T.; DEMKOWICZ, L., Toward a universal $h=p$ adaptive finite element strategy, part3. design of h - p meshes, computer meth. in applied mechanics and engineering, 77, 181-212, 1989.

RAIZER, A.; MEUNIER, G.; COULOMB, J-L., An approach for automatic adaptive mesh refinement in finite element computation of magnetic fields, IEEE Trans. on Mag., Vol. 25, nº 4 1984.

RAIZER, A.; HOOLE, S.R.H.; MEUNIER, G.; COULOMB, J-L., p - and h - type adaptive mesh generation, journal applied in physics, Vol. 67, nº 9, 5803-5805, may, 1990.

RAIZER, A., Maillage auto - adaptatif dans les logiciels de calcul de champs eletromagnetique bidimensionnel et tridimensionnel, tese de doutorado, Institute National Polytechnique de Grenoble, 1991.

RIKABI, J., An error - based approach to complementary formulations of static fields solutions, intern. j. num. methods eng., Vol. 26, 1963-1987, 1988.

SILVESTER, P., Campos eletromagnéticos modernos, Editôra Polígono, 1971.

SIMKIN, J.; TROWBRIDGE, C.W., On the use of total scalar potential in the numerical solution of field problems in eletromagnetics, intern. j. num. methods eng, 44, 423-440, 1979.

SILVESTER, P. & FERRARI, P.L., Finite elements for eletrical engineers, Cambridge(U.K.), Cambridge University Press, 1983.

STRANG G.; FIX, O.J., An analysis of the finite element method, Prentice - Hall, 1983.

SZABO, B.A ., Estimation and Control of error based in p convergence, in Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, John Wiley & Sons, 1986.

SZABO B.A.; BABUSKA, I. , Finite element analysis, J. Wiley & Sons, New York, 1991.

TÄRNHUVUD, T.; REICHERT, K., Acuracy problems of force and torque calculation in FE - systems, IEEE Trans. on Mag., Vol. MAG-20, nº5, 1962-1964, september, 1984.

VANTI, M.G., Um sistema automático para geração de malhas adaptativas, Dissertação de mestrado, UFSC, 1992.

VANTI, M.G.; RAIZER, A. ; BASTOS, J.P.A. , A magnetostatic 2D comparison of local error estimators in FEM, IEEE Trans. On Mag., Vol 29, nº 2, pp. 1902-1905, March, 1993.m

VANTI,M.G; RAIZER, A .;MARECHAL, Y., Versão adaptativa *h-p*: Conceitos e implementação com elementos hierárquicos, artigo aceito para apresentação no 2^o Cbmag, 1996.

VANTI,M.G; RAIZER, A .;MARECHAL, Y., O uso de funções hierárquicas no método dos elementos finitos e sua aplicação em problemas magnetostáticos, artigo aceito para apresentação no 2^o Cbmag, 1996

VANTI, M.G.; RAIZER A .; MARÉCHAL, Y., Optimal meshes and h-p adaptivity, artigo aceito para ser publicado no IEEE Trans. On Mag., March, 1997.

WEN, D.; JIANG, K., *p*- version adaptive computation of FEM, IEEE Trans. On Mag., Vol. 30, nº 5, pp 3515-3518, september, 1994.

ZGAINSKI, F-X.; MARÉCHAL, Y. M.; COULOMB, J-L.; VANTI, M. G., RAIZER, A., An a priori indicator of finite element quality based on the condition number of the stiffness matrix, artigo aceito para ser publicado no IEEE Trans. On Mag., March, 1997.

ZIENKIEWICZ,O.C.; CRAIG, A. W., Adaptive mesh refinement and a posteriori error estimation for the p-version of the finite element method, in Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia, 1983.

ZIENKIEWICZ,O.C.; CRAIG, A. W., Adaptive refinement, error estimates, multigrid solution, and hierarchic finite element method concepts, in Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, John Wiley & Sons, 1986.

ZIENKIEWICZ,O.C.; ZHU,J.Z. , A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, internat. journal numer. methods eng., 24, 337-357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. , The finite element method, McGRAW - HILL, Book Company, Fourth Edition, 1990.